Capítulo 1

Matrices y sus operaciones

1.1. Definiciones

Dados dos enteros $m, n \geq 1$ y un cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$, llamamos **matriz de** m **filas y** n **columnas con coeficientes en** $\mathbb{K}$ a un conjunto ordenado de n vectores

$$\mathbf{C}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}), \mathbf{C}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}), \ldots,$$

$$\mathbf{C}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}),$$

del espacio $\mathbb{K}^m$.

Las matrices se escriben en forma de *cuadro rectangular*, encerrado entre paréntesis, colocando las componentes de los vectores $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_n$ en vertical, unas a continuación de las del otro:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Los vectores dato se denominan **columnas de la matriz**. La propia manera de presentar una matriz sugiere la consideración de m vectores

$$\mathbf{F}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \mathbf{F}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots,$$

$$\mathbf{F}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}),$$

del espacio $\mathbb{K}^n$, los cuales reciben el nombre de **filas de la matriz**. Con ellos como dato se podría haber dado una definición *alternativa* de matriz: sería un conjunto ordenado de m vectores del espacio $\mathbb{K}^n$.

Cada una de las componentes de cada uno de los vectores datos se conoce como un **coeficiente de la matriz**. Su doble índice indica que a_{ij} es el coeficiente situado en la fila i-ésima y en la columna j-ésima. En total hay mn coeficientes.

Con frecuencia usaremos la escritura abreviada

$$(a_{ij}),$$

sobreentendiendo que $i \in [1, m]$ y $j \in [1, n]$. Incluso, se aluda o no a los coeficientes, la matriz se escribe con una sola letra mayúscula, tal como A, B, M, N, etc. En estos casos, $\mathbf{F}_i(A)$ indicará la fila i-ésima en la matriz A y $\mathbf{C}_j(A)$ la columna j-ésima; a veces pondremos $e_{ij}(A)$ para indicar el coeficiente ubicado en el *cruce* de $\mathbf{F}_i(A)$ con $\mathbf{C}_j(A)$.

El conjunto de todas las matrices de m filas, n columnas y coeficientes en $I\!\!K$ se denota por el símbolo

$$\mathcal{M}(m, n, I\!\!K).$$

1.2. Igualdad de matrices

Por haber definido la matriz como un conjunto ordenado de n vectores, es claro que dadas dos matrices

$$A, B \in \mathcal{M}(m, n, I\!\!K)$$

se cumple

$$A = B \Rightarrow \mathbf{C}_j(A) = \mathbf{C}_j(B), \forall j \in [1, n].$$

Si $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, como cada columna es, a su vez, una m-upla ordenada de elementos de $I\!\!K$, cada una de las igualdades vectoriales de antes equivale a m igualdades escalares referidas a sus componentes. Es decir, la igualdad matricial equivale a mn igualdades escalares:

$$A = B \Rightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in [1, m], \forall j \in [1, n].$$

Estas igualdades conducen a otra equivalencia, ahora por filas:

$$A = B \Rightarrow \mathbf{F}_i(A) = \mathbf{F}_i(B), \forall i \in [1, m].$$

1.3. Tipos particulares de matrices

Hay algunas matrices que reciben nombres propios. Entre ellas vamos a destacar las siguientes:

a) **Matrices columna:** Corresponden al caso en que m es arbitrario pero $n = 1$. Sus coeficientes se escriben con un solo índice,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},$$

y cada una de sus filas es un escalar.

b) **Matrices fila:** Ahora es $m = 1$ y n cualquiera. También se escriben con un solo índice,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

siendo escalares cada una de sus columnas.

c) **Matrices cuadradas:** Se llaman así aquellas en que $m = n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tanto sus filas como sus columnas serán vectores de un mismo espacio $\mathbb{K}^n$. El conjunto de todas ellas se escribe como

$$\mathcal{M}(n, \mathbb{K}).$$

d) **Matrices triangulares:** Una matriz cuadrada recibe el nombre de **supra-triangular** cuando

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow a_{ij} = 0, \forall i > j.$$

En cambio, se llamará **infratriangular** si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow a_{ij} = 0, \forall i < j.$$

Unas y otras se nombran como triangulares.

e) **Matrices diagonales:** En toda matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, se llama **diagonal** al vector

$$(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) \in \mathbb{K}^n.$$

Se dirá que esta matriz es diagonal cuando sean nulos todos los coeficientes situados fuera de la diagonal, es decir, cuando

$$a_{ij} = 0, \forall i \neq j.$$

Estas matrices son a la vez supra e infratriangulares. A veces sus coeficientes se presentan con un solo índice, usándose las escrituras

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

1. **Matrices escalares:** Damos este nombre a las matrices diagonales

$$A = \mathrm{diag}(a, a, \ldots, a) \in \mathcal{M}(n, I\!\!K)$$

cuyos coeficientes en la diagonal son todos iguales. Si $n = 1$, todas las matrices son escalares y el conjunto de ellas se confunde con $I\!\!K$.

2. **Matrices unidad:** Para cada $n \geq 1$, se llama así a la matriz escalar

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1).$$

Cuando no haya lugar a confusión, escribiremos simplemente I. Usando las deltas de Kronecker (sección **??**) puede escribirse

$$I_n = (\delta_{ij})$$

1.4. Multiplicación de matrices

Sean tres números enteros $m, r, n \geq 1$ y sean dos matrices

$$A = (a_{ih}) \in \mathcal{M}(m, r, I\!\!K), B = (b_{hj}) \in \mathcal{M}(r, n, I\!\!K).$$

Que la cantidad r de columnas de A coincida con la cantidad de filas de B, y, por tanto, con la cantidad de componentes numéricas de cada columna en B, permite construir una nueva matriz

$$A \times B \in \mathcal{M}(m, n, I\!\!K),$$

mediante la regla

$$\mathbf{C}_j(A \times B) = \sum_{h=1}^{r} b_{hj} \mathbf{C}_h(A), \forall j \in [1, n].$$

Se llama **matriz producto de** A **por** B, debiéndose insistir en que su existencia es imposible si la cantidad de columnas de A difiere de la de filas de B.

Suponiendo que $A \times B = (c_{ij})$, se tendrá

$$\mathbf{C}_j(A \times B) = (c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{mj}) = \sum_{h=1}^{r} b_{hj}(a_{1h}, a_{2h}, \ldots, a_{mh}) =$$

$$= \sum_{h=1}^{r} (a_{1h}b_{hj}, a_{2h}b_{hj}, \ldots, a_{mh}b_{hj}) =$$

$$= (\sum_{h=1}^{r} a_{1h}b_{hj}, \sum_{h=1}^{r} a_{2h}b_{hj}, \ldots, \sum_{h=1}^{r} a_{mh}b_{hj}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{ij} = e_{ij}(A \times B) = \sum_{h=1}^{r} a_{ih} b_{hj}, \forall i \in [1, m], \forall j \in [1, n],$$

que es la forma en que usualmente se define el producto.

Por otra parte,

$$(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in}) = (\sum_{h=1}^{r} a_{ih} b_{h1}, \sum_{h=1}^{r} a_{ih} b_{h2}, \ldots, \sum_{h=1}^{r} a_{ih} b_{hn}) =$$

$$= \sum_{h=1}^{r} (a_{ih} b_{h1}, a_{ih} b_{h2}, \ldots, a_{ih} b_{hn}) = \sum_{h=1}^{r} a_{ih} (b_{h1}, b_{h2}, \ldots, b_{hn}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_i(A \times B) = \sum_{h=1}^{r} a_{ih} \mathbf{F}_h(B), \forall i \in [1, m],$$

que sería la forma de definir el producto usando las filas.

1.5. Propiedades de la multiplicación de matrices

Comprobando la igualdad entre los vectores columna de cada miembro de la igualdad propuesta, y nombrando los coeficientes de cada matriz con las mismas letras, pero en minúscula, indiquemos las propiedades de esta nueva operación.

Proposición 1.1 *La multiplicación de matrices cumple las propiedades*

a) **Asociativa***:*

$$A \in \mathcal{M}(m, r, I\!\!K), B \in \mathcal{M}(r, s, I\!\!K), C \in \mathcal{M}(s, n, I\!\!K) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

b) **Distributiva***:*

$$A, B \in \mathcal{M}(m, r, I\!\!K), C \in \mathcal{M}(r, n, I\!\!K) \Rightarrow (A + B) \times C = A \times C + B \times C,$$

$$A \in \mathcal{M}(m, r, I\!\!K), B, C \in \mathcal{M}(r, n, I\!\!K) \Rightarrow A \times (B + C) = A \times B + A \times C.$$

c) **De neutralidad***:*

$$A \in \mathcal{M}(m, n, I\!\!K) \Rightarrow I_m \times A = A = A \times I_n.$$

d) **Asociativa mixta***:*

$$A \in \mathcal{M}(m, r, I\!\!K), B \in \mathcal{M}(r, n, I\!\!K), a \in I\!\!K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (aA) \times B = a(A \times B) = A \times (aB).$$

Demostración:

a) $\mathbf{C}_j((A\times B)\times C)=\sum_{k=1}^{s}c_{kj}\mathbf{C}_k(A\times B)=\sum_{k=1}^{s}c_{kj}(\sum_{h=1}^{r}b_{hk}\mathbf{C}_h(A))=$

$$=\sum_{h=1}^{r}(\sum_{k=1}^{s}b_{hk}c_{kj})\mathbf{C}_h(A)=\sum_{h=1}^{r}e_{hj}(B\times C)\mathbf{C}_h(A)=\mathbf{C}_j(A\times(B\times C)).$$

b) $\mathbf{C}_j((A+B)\times C)=\sum_{h=1}^{r}c_{hj}\mathbf{C}_h(A+B)=\sum_{h=1}^{r}c_{hj}(\mathbf{C}_h(A)+\mathbf{C}_h(B))=$

$$=\sum_{h=1}^{r}(c_{hj}\mathbf{C}_h(A)+c_{hj}\mathbf{C}_h(B))=\sum_{h=1}^{r}c_{hj}\mathbf{C}_h(A)+\sum_{h=1}^{r}c_{hj}\mathbf{C}_h(B)=$$

$$=\mathbf{C}_j(A\times C)+\mathbf{C}_j(B\times C)=\mathbf{C}_j(A\times C+B\times C),$$

$$\mathbf{C}_j(Ax(B+C))=\sum_{h=1}^{r}e_{hj}(B+C)\mathbf{C}_h(A)=\sum_{h=1}^{r}(b_{hj}+c_{hj})\mathbf{C}_h(A)=$$

$$=\sum_{h=1}^{r}(b_{hj}\mathbf{C}_h(A)+c_{hj}\mathbf{C}_h(A))=\sum_{h=1}^{r}b_{hj}\mathbf{C}_h(A)+\sum_{h=1}^{r}c_{hj}\mathbf{C}_h(A)=$$

$$=\mathbf{C}_j(A\times B)+\mathbf{C}_j(A\times C)=\mathbf{C}_j(A\times B+A\times C).$$

c) $\mathbf{C}_j(I_m\times A)=\sum_{h=1}^{r}a_{hj}\mathbf{C}_h(I_n)=\sum_{h=1}^{r}a_{hj}\mathbf{e}_h=(a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{mj})=$

$$=\mathbf{C}_j(A)=\sum_{h=1}^{r}\delta_{hj}\mathbf{C}_h(A)=\mathbf{C}_j(A\times I_n).$$

d) $\mathbf{C}_j((aA)\times B)=\sum_{h=1}^{r}b_{hj}\mathbf{C}_h(aA)=\sum_{h=1}^{r}b_{hj}(a\mathbf{C}_h(A))=$

$$=\sum_{h=1}^{r}(b_{hj}a)\mathbf{C}_h(A)=\sum_{h=1}^{r}(ab_{hj})\mathbf{C}_h(A)=\sum_{h=1}^{r}a(b_{hj}\mathbf{C}_h(A))=$$

$$=a\sum_{h=1}^{r}b_{hj}\mathbf{C}_h(A)=a\mathbf{C}_j(AxB)=\mathbf{C}_j(a(AxB))=$$

$$=a\mathbf{C}_j(AxB)=a\sum_{h=1}^{r}b_{hj}\mathbf{C}_h(A)=\sum_{h=1}^{r}a(b_{hj}\mathbf{C}_h(A))=$$

$$=\sum_{h=1}^{r}(ab_{hj})\mathbf{C}_h(A)=\sum_{h=1}^{r}e_{hj}(aB)\mathbf{C}_h(A)=\mathbf{C}_j(A\times(aB)).$$

Para la propiedad conmutativa, se observa que $B\times A$ no siempre existe. Lo hace si y sólo si $n=m$, pero, como $A\times B\in\mathcal{M}(n,I\!\!K)$ y $B\times A\in\mathcal{M}(r,I\!\!K)$, no son *comparables en igualdad* salvo que $r = n$ y sólo entonces. Es decir, $A \times B$ y $B \times A$ existen y pueden compararse si y sólo si se trata de matrices cuadradas con igual cantidad de filas y columnas. Aún así, los ejemplos muestran que la conmutatividad no siempre está asegurada:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

1.6. Traza de una matriz cuadrada

Dada una matriz cuadrada $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}(n, I\!K)$, la suma de los coeficientes situados en la diagonal, es decir, el número

$$\mathrm{tr}\,(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn},$$

se conoce como **traza de** A.

Proposición 1.2 *Cualesquiera que sean* $A, B \in \mathcal{M}(n, I\!K)$, $a \in I\!K$, *se cumple*

$$\mathrm{tr}\,(A + B) = \mathrm{tr}\,(A) + \mathrm{tr}\,(B),\ \mathrm{tr}\,(aA) = a\,\mathrm{tr}\,(A).$$

Demostración:

Basta unir las reglas operativas y la definición de traza. $\square$

Este teorema indica que la traza es una forma lineal del espacio $\mathcal{M}(n, I\!K)$.

Proposición 1.3 *Dadas* $A, B \in \mathcal{M}(n, I\!K)$, *se cumple*

$$\mathrm{tr}\,(A \times B) = \mathrm{tr}\,(B \times A).$$

Demostración:

$$\mathrm{tr}\,(A \times B) = \sum_{i=1}^{n} e_{ii}(A \times B) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{h=1}^{r} a_{ih} b_{hi}) =$$

$$= \sum_{h=1}^{r}(\sum_{i=1}^{n} b_{hi} a_{ih}) = \sum_{h=1}^{r} e_{hh}(B \times A) = \mathrm{tr}\,(B \times A).$$

$\square$

1.7. Trasposición de matrices

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}(m, n, I\!K)$ llamaremos **traspuesta de** A a una nueva matriz $A^t \in \mathcal{M}(n, m, I\!K)$ definida por cualquiera de las reglas equivalentes

$$\mathbf{C}_i(A^t) = \mathbf{F}_i(A), \forall i \in [1, m],$$

$$e_{ji}(A^t) = e_{ij}(A), \forall i \in [1, m] \text{ y } \forall j \in [1, n],$$
$$\mathbf{F}_j(A^t) = \mathbf{C}_j(A), \forall j \in [1, n].$$

Proposición 1.4 *Cualesquiera que sean $A, B \in \mathcal{M}(m, n, I\!K)$, $a \in I\!K$, se cumple*

$$(A + B)^t = A^t + B^t, (aA)^t = aA^t, (A^t)^t = A.$$

Demostración:

1. $\mathbf{C}_i((A + B)^t) = \mathbf{F}_i(A + B) = \mathbf{F}_i(A) + \mathbf{F}_i(B) =$

$$= \mathbf{C}_i(A^t) + \mathbf{C}_i(B^t) = \mathbf{C}_i(A^t + B^t), \forall i \in [1, n] \Rightarrow (A + B)^t = A^t + B^t.$$

2. $\mathbf{C}_i((aA)^t) = \mathbf{F}_i(aA) = a\mathbf{F}_i(A) = a\mathbf{C}_i(A^t) =$

$$= \mathbf{C}_i(aA^t), \forall i \in [1, n] \Rightarrow (aA)^t = aA^t.$$

3. $\mathbf{C}_i((A^t)^t) = \mathbf{F}_i(A^t) = \mathbf{C}_i(A), \forall i \in [1, n] \Rightarrow (A^t)^t = A.$

□

La aplicación

$${}^t : \mathcal{M}(m, n, I\!K) \to \mathcal{M}(n, m, I\!K), \text{ de ley } A \mapsto A^t,$$

se nombra como **proceso de trasposición**. De las dos primeras propiedades se sigue que se trata de una aplicación lineal. De la última se desprende que es una biyección y que su inversa es la trasposición

$${}^t : \mathcal{M}(n, m, I\!K) \to \mathcal{M}(m, n, I\!K).$$

Por tanto, la trasposición es un isomorfismo lineal de $\mathcal{M}(m, n, I\!K)$ sobre $\mathcal{M}(n, m, I\!K)$. En el caso $m = n$ (matrices cuadradas) se trata de un automorfismo inverso de sí mismo.

Proposición 1.5 *Dadas las matrices $A \in \mathcal{M}(m, r, I\!K)$, $B \in \mathcal{M}(r, n, I\!K)$, se cumple*

$$(A \times B)^t = B^t \times A^t.$$

Demostración:

Basta ver que, para todo $i \in [1, n]$, se cumple

$$\mathbf{C}_i((A \times B)^t) = \mathbf{F}_i(A \times B) = e_{i1}(A)\mathbf{F}_1(B) + \ldots + e_{in}(A)\mathbf{F}_n(B) =$$

$$= e_{1i}(A^t)\mathbf{C}_1(B^t) + \ldots + e_{ni}(A^t)\mathbf{C}_n(B^t) = \mathbf{C}_i(B^t \times A^t).$$

□

Proposición 1.6 *Si $A \in \mathcal{M}(n, I\!\!K)$ es invertible, su traspuesta también lo es y la inversa de la traspuesta es la traspuesta de la inversa.*

Demostración:

Trasponiendo en $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$, y observando que $I^t = I$ porque la diagonal no se altera por trasposición, se obtiene

$$(A \times A^{-1})^t = (A^{-1})^t \times A^t = I^t = I = (A^{-1} \times A)^t = A^t \times (A^{-1})^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

□

1.8. Matrices simétricas y antisimétricas

Si $A \in \mathcal{M}(n, I\!\!K)$, también $A^t \in \mathcal{M}(n, I\!\!K)$. Entonces, pueden *compararse en igualdad* y surgen dos conceptos importantes (simetría y antisimetría) del álgebra matricial. Para su estudio será preciso suponer que $I\!\!K$ es un cuerpo conmutativo de característica distinta de 2.

Se dice que $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}(n, I\!\!K)$ es una **matriz simétrica** cuando

$$A^t = A \Leftrightarrow \mathbf{C}_i(A) = \mathbf{F}_i(A), \forall i \in [1, n] \Leftrightarrow a_{ji} = a_{ij}, \forall i, j \in [1, n].$$

Si A es simétrica, los elementos de la diagonal no se alteran por trasposición, luego toman valores arbitrarios. También lo hacen los elementos a_{ij}, con $i < j$, situados por encima de la diagonal, mientras que cada a_{ji} situado abajo se iguala al a_{ij}. Entonces, el *aspecto* de A será

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Proposición 1.7 *Las matrices simétricas constituyen un subespacio vectorial del $\mathcal{M}(n, I\!\!K)$.*

Demostración:

Si A y B son simétricas y $a \in I\!\!K$, se tiene

$$(A+B)^t = A^t + B^t = A + B, (aA)^t = aA^t = aA.$$

$\square$

Se denota por $\mathcal{S}(n, I\!\!K)$ y no se trata de un subanillo, pues en general

$$(A \times B)^t = B^t \times A^t = B \times A \neq A \times B.$$

Se dice que A es una **matriz antisimétrica** (o **hemisimétrica**) cuando

$$A^t = -A \Leftrightarrow \mathbf{C}_i(A) = -\mathbf{F}_i(A), \forall i \in [1, n] \Leftrightarrow a_{ji} = -a_{ij}, \forall i, j \in [1, n].$$

Si A es antisimétrica los elementos diagonales, por coincidir con sus opuestos, son nulos. Para $i < j$, a_{ji} se iguala a $-a_{ij}$, luego sólo toman valores arbitrarios los situados encima de la diagonal. La matriz, pues, se *presenta* así:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 1.8 *Las matrices antisimétricas constituyen un subespacio vectorial del $\mathcal{M}(n, I\!\!K)$.*

Demostración:

Si A y B son antisimétricas y $a \in I\!\!K$, se tiene

$$(A+B)^t = A^t + B^t = (-A) + (-B) = -(A+B),$$

$$(aA)^t = aA^t = a(-A) = -(aA).$$

Se denota por $\mathcal{A}(n, I\!\!K)$ y tampoco se trata de un subanillo porque

$$(A \times B)^t = B^t \times A^t = (-B) \times (-A) = B \times A \neq -(A \times B).$$

$\square$