TEMA 4

ONDAS DE SEÑAL: ONDA ALTERNA SENOIDAL

Fr. Casares de la Torre

Marzo 2010

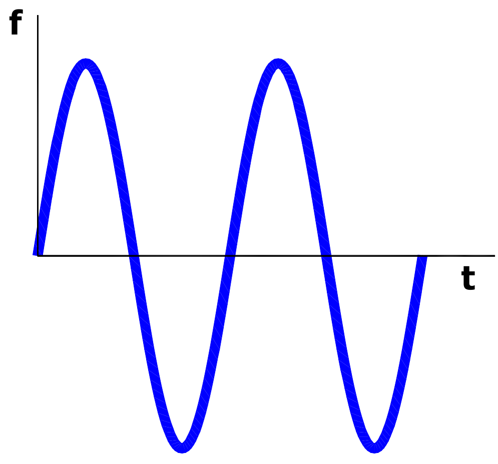
TEMA 4. ONDAS DE SEÑAL: ONDA ALTERNA SENOIDAL

Hasta ahora, hemos analizado las características de los elementos y el comportamiento de sus conexiones. En este tema vamos a iniciar el estudio de las señales (tensión e intensidad de la corriente eléctrica) y los métodos que se utilizan para describir y cuantificar sus características.

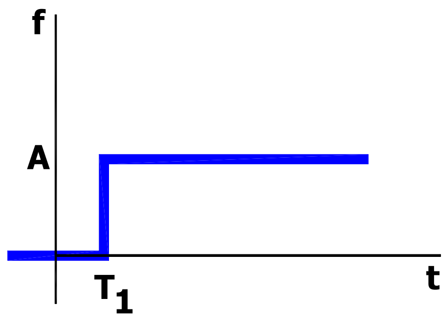
La señal tensión o intensidad de la corriente es, generalmente, una magnitud que varía con el tiempo, la representación de esta variación o la ecuación que lo describe recibe el nombre de "**Forma de ONDA**" u **"ONDA".**

UNA ONDA ES UNA GRÁFICA O ECUACIÓN QUE DA UNA DESCRIPCIÓN COMPLETA DE LA SEÑAL EN FUNCIÓN DEL TIEMPO

En las figuras siguientes se muestran algunas formas de onda de uso frecuente:



Onda Senoidal



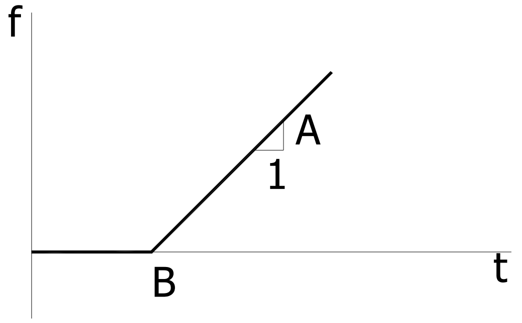
Onda Escalón

$f = F_0$ sen $(\omega t + \varphi)$
F_0 es la amplitud
ω es la pulsación
$\omega t + \varphi$ es el ángulo de fase
φ es el ángulo de fase inicial

$f = 0$ $\quad t < T_1$
$f = A$ $\quad t > T_1$

T_1 = T. de escalón
A = Amplitud

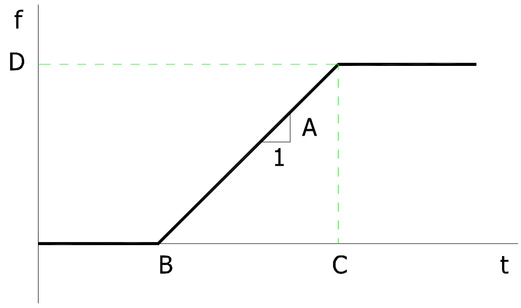
f puede ser la señal tensión, **u**, o la señal intensidad de la corriente, **i.**



Función rampa

$f = 0 \quad t < B$

$f = At \quad t \geq B$

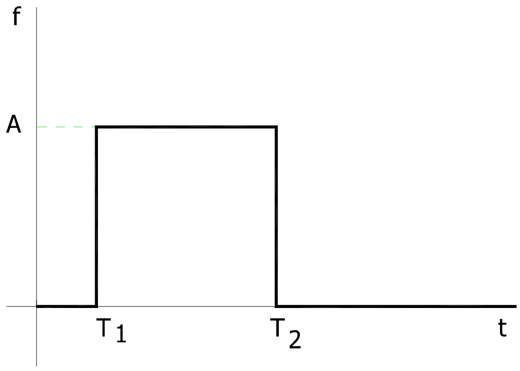


Función rampa modificada

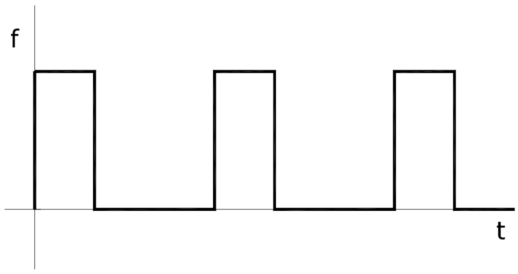
$f = 0 \quad t < B$

$f = At \quad t \geq B$

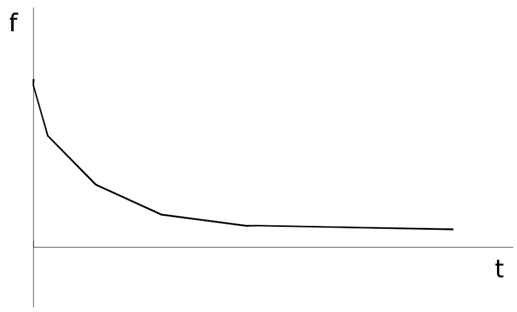
$f = D \quad t > C$



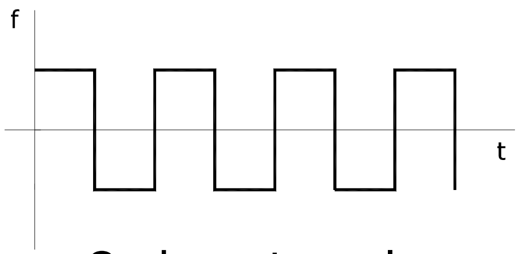
Pulso rectangular



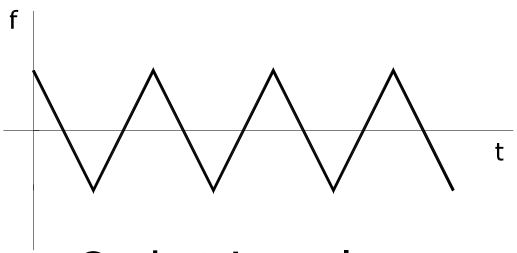
Tren de impulsos



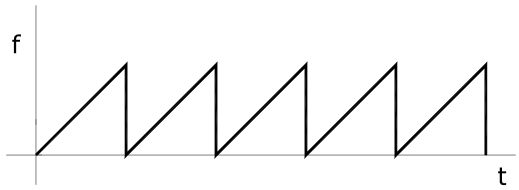
Exponencial



Onda rectangular



Onda triangular



Diente de Sierra

4.1.- CLASIFICACIÓN DE ONDAS

Según signo de la magnitud

- *Bidireccional:* Polaridad de la magnitud (+) y (-) y cambia con el tiempo. Ejemplos: onda senoidal, triangular, etc.
- *Unidireccional:* Polaridad única. Ejemplos: tren de impulsos, onda exponencial, dientes de sierra, etc.

Especial significación tienen en electrotecnia la onda bidireccional senoidal, onda exponencial, escalón unitario y la función rampa.

Según repetición del valor de la magnitud con el tiempo

- ***Funciones periódicas***: El valor de magnitud se repite con el tiempo a intervalos iguales. Su expresión más general es:

$$y = f(t) = f(t+nT)$$

donde n es un número entero y **T** es una constante llamada **PERÍODO**.

Es decir, la función se repite cada vez que transcurre un tiempo **T** (**PERÍODO)**.

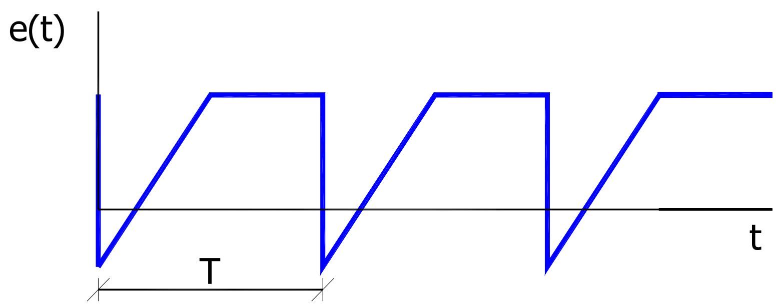


Fig. Ejemplo de Onda periódica que se repite cada T sg

Otras características de la onda periódica son:

Ciclo: Parte de una onda comprendida entre t y t + T, o sea en un intervalo de tiempo igual a un período.

Frecuencia (f): Número de ciclos que se repite la onda en la unidad de tiempo. Según esto, se podrá escribir: $\mathbf{f \cdot T = 1}$ de donde la frecuencia es la inversa del período. La unidad de frecuencia es el ciclo por segundo o hercio (Hz).

Fase: Fracción de período transcurrido desde el instante que tomamos como referencia.

- ***Funciones no periódicas***: Son aquéllas en el que el valor que toma la función es arbitraria con el tiempo.

Fig: Ejemplo de función de onda no periódica

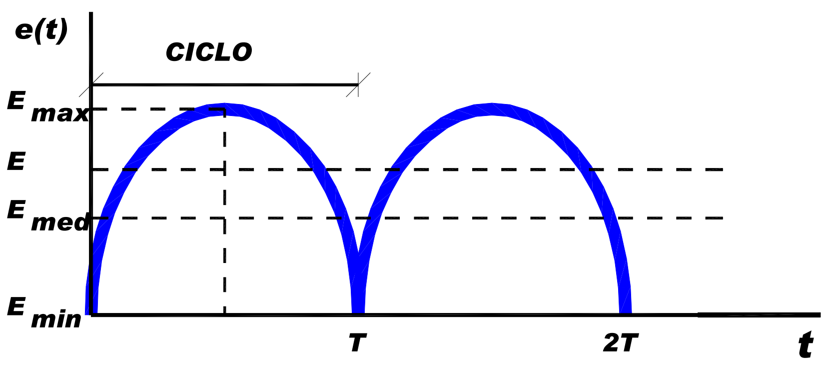
4.2.- VALORES ASOCIADOS A LAS ONDAS PERIÓDICAS

Cualquier función periódica se caracteriza por una serie de parámetros, que son los anteriormente enunciados (ciclo, período, fase), además existen una serie de valores asociados a estas que nos proporcionan cierta información para poder comparar diferentes funciones de las ondas, estos son:

☞ ***Valores de cresta o de pico***: Son los valores máximos y mínimos que toma la función. Si la señal es **e(t)** se designarán respectivamente por **“E_{MAX}“** y **“E_{MIN}”**.

En caso de una onda periódica y simétrica respecto al eje del tiempo la **AMPLITUD** corresponde al valor máximo o mínimo (valor de cresta) en valor absoluto. Si la señal es **e(t)**, la notación del valor de cresta o amplitud es "**E_0**".

☞ ***Valor de cresta a cresta***: Diferencia algebraica entre el valor máximo y mínimo. También se le llama valor de pico a pico, y es siempre un número positivo.



Si la señal es e(t), la notación del valor de pico a pico será:

$E_{CC} = E_{PP} = \mathbf{E_{MAX} - E_{MIN}}$

☞ ***Valor medio:*** Promedio integral en un período, "$\mathbf{E_m}$". Geométricamente el área que comprende la función durante un período debe ser igual al área de un rectángulo cuya altura es el valor medio y la base el período:

$$\int_0^T e(t)\,dt = E_m \cdot T$$

de donde:

$$E_m = \frac{1}{T}\int_0^T e(t)\,dt$$

Nota:	Comprobemos que el valor medio, $\mathbf{I_{med}}$, de una corriente periódica, $\mathbf{i=i(t)}$, de período **T**, es el valor de una corriente continua que en un período **T** transferiría la misma carga a un circuito que la corriente periódica. Teniendo en cuenta que $\mathbf{i = dq/dt}$**,** la carga transferida en un período será: $$Q = \int_0^T i\,dt$$ En cuanto a la corriente continua de valor $\mathbf{I_{med}}$**,** la cantidad de carga transferida en el mismo intervalo de tiempo valdrá: $$Q = \int_0^T I_{med}\,dt = I_{med}\,T$$ igualando tendremos: $$I_{med}\,T = \int_0^T i\,dt$$ de donde $$I_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T i\,dt$$ que coincide con la definición del valor medio.

Lógicamente, en toda onda simétrica respecto al eje de tiempos, las áreas positiva y negativas son iguales, esto implica que el valor medio será nulo.

☞ ***Valor eficaz "E"***: Se define el valor eficaz como el valor cuadrático medio o la raíz cuadrada del valor medio del cuadrado de la función en un período. Según esta definición podremos escribir:

$$E^2\,T = \int_0^T e^2(t)\,dt$$

de donde:

$$E = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2(t)\,dt}$$

> **Nota:** Es interesante comprobar que la intensidad eficaz I correspondiente a una corriente periódica i(t) es el valor constante de una corriente continua que en un período T, y sobre una resistencia R produciría el mismo calor que la corriente periódica.
>
> La corriente periódica i(t) produciría un calor:
>
> $$W = \int_0^T R\,i^2\,dt = R\int_0^T i^2\,dt$$
>
> y la corriente continua de valor I, en el mismo intervalo de tiempo produciría:
>
> $$W = \int_0^T R\,I^2\,dt = R\,I^2\,T$$
>
> igualando
>
> $$R\,I^2\,T = R\int_0^T i^2\,dt$$
>
> de donde:
>
> $$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}$$
>
> por lo que el valor eficaz es una medida de la potencia media entregada a la carga, o sea, transportada por la señal.

☞ ***Factor de cresta***: Es la relación entre el valor de cresta y el valor eficaz.

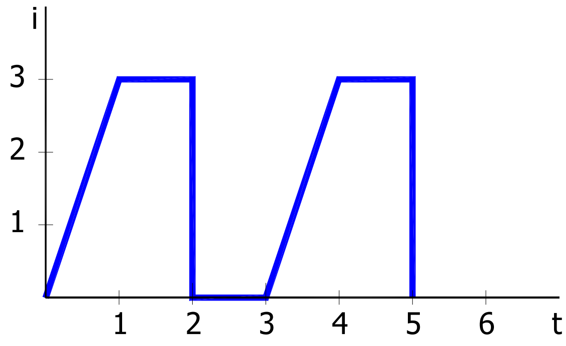
$$F_C = \frac{E_0}{E}$$

☞ ***Factor de forma***: Es la relación entre el valor eficaz y el valor medio.

$$F_f = \frac{E}{E_m}$$

Ejercicio

Calcular los valores asociados a la onda de corriente de la figura.



Ecuaciones:

$0<t<1$	$i = 3t\ A$
$1<t<2$	$i = 3\ A$
$2<t<3$	$i = 0\ A$

***Solución*:**

Valor de cresta máximo: $I_{max} = 3$ A

Valor de cresta mínimo: $I_{min} = 0$ A

Valor de cresta a cresta: $I_{PP} = 3 - 0 = 3$ A

Período: 3 s

Frecuencia: 1/3 = 0,333 Hz

Valor medio:

$$I_m = \frac{1}{3}\left[\int_0^1 3t\,dt + \int_1^2 3\,dt\right] = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{3t^2}{2}\right)_0^1 + (3t)_1^2\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{3}{2} + 3\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{9}{2}\right] = \frac{3}{2}\ A$$

Valor eficaz:

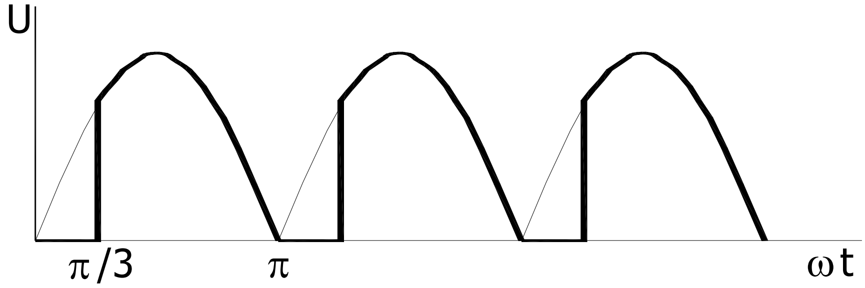
$$I = \sqrt{\frac{1}{3}\left[\int_0^1 9t^2\,dt + \int_1^2 9\,dt\right]} = \sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(9\frac{t^3}{3}\right)_0^1 + [9t]_1^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{3}[3+9]} = 2$$

Factor de forma: $$F_f = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3}$$

Factor de cresta: $$F_C = \frac{3}{2}$$

Ejercicio

Hallar los valores asociados de la función representada en la figura, que corresponde a una onda de tensión senoidal rectificada con ángulo de retraso de 60º. Hallar los valores medio y eficaz en función del valor máximo.



Solución: Si la función senoidal es: $u = U_0$ sen ωt

Valor de cresta máximo: $U_{max} = U_0$

Valor de cresta mínimo: $U_{min} = 0$ V

Valor de cresta a cresta: $U_{PP} = U_0$

Período: $T = 2\pi/\omega$ Frecuencia: $f=1/T$

Valor medio:

$$U_m = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/3}^{\pi} U_0\, sen\ \omega t\, d(\omega t) = \frac{U_0}{\pi}\Big[-\cos\ \omega t\Big]_{\pi/3}^{\pi} =$$

$$= \frac{U_0}{\pi}[1+0{,}5] = \frac{1{,}5}{\pi}U_0 = 0{,}4774\ U_0$$

Valor eficaz

$$U^2 = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/3}^{\pi} U_0^2\ sen^2\ \omega t\, d(\omega t) = \frac{U_0^2}{2\pi}\left[\omega t - \frac{sen\ 2\omega t}{2}\right]_{\pi/3}^{\pi} =$$

$$= \frac{U_0^2}{2\pi}\left[\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{sen\ 2\pi/3}{2}\right] = 0{,}4022\ U_0^2$$

$$U = U_0\sqrt{0{,}4022} = 0{,}6341\ U_0$$

Factor de forma: $$F_f = \frac{0{,}6341\ U_0}{0{,}4774\ U_0} = 1{,}9566$$

Factor de cresta: $$F_C = \frac{U_0}{0{,}6341\ U_0} = 1{,}577$$

4.3.- ONDA ALTERNA SENOIDAL

Al hablar de corriente alterna (C.A.) se sobrentiende que hablamos de C.A. de tipo senoidal, esto es así, porque la onda seno es la que se obtiene en los generadores de C.A. y constituye la base de producción, transporte y distribución de energía eléctrica, de ahí la importancia de su estudio. La ecuación matemática que la define es:

$$\mathbf{e(t) = E_0\ sen\ (\omega t + \varphi)}$$

donde: **E_0** es la amplitud (valor máximo de la función)

ω es la pulsación o frecuencia angular (rad/sg)

$\omega t + \varphi$ es el ángulo de fase

φ es el ángulo de fase inicial (ángulo para el cual la función se anula, tendiendo a hacerse positiva). Se expresa en rad

e es el valor que toma la función en un instante **t**, es el valor instantáneo.

Como es sabido, el ciclo de la función trigonométrica seno es igual **2π** , por tanto el período **T** debe satisfacer la relación siguiente: **$\omega\ T = 2\ \pi$** con lo que $T = \frac{2\pi}{\omega}$ y la frecuencia

será: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

normalmente se da el valor de la frecuencia por lo que la pulsación en función de esta será:

$$\mathbf{\omega = 2\ \pi\ f}$$

Aparte de ser la **onda más importante en Electrotecnia** debido a que se puede generar con facilidad, su transformación en otras ondas de diferente amplitud se consigue con facilidad mediante la utilización de transformadores y las operaciones para su utilización resultan igualmente sencilla por tratarse de la función seno, desde el punto de vista de la teoría de circuitos la onda senoidal presenta una serie de ventajas que la hacen atractiva que son:

1) La función seno está perfectamente definida mediante su expresión analítica y gráfica.

2) Se puede derivar e integrar repetidamente y seguir siendo una senoide de la misma frecuencia. (cambia la amplitud y el ángulo de fase inicial)

$$e(t) = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1) \quad \rightarrow \quad \frac{de(t)}{dt} = E_0\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1 + 90º)$$

$$\rightarrow \int e(t)\, dt = \frac{E_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1 - 90º)$$

3) La suma de ondas senoidales de igual frecuencia es otra onda senoidal de igual frecuencia pero de parámetros diferentes.

Sea $e_1(t) = E_{01} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1)$ y $e_2(t) = E_{02} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_2)$

La suma tendrá por expresión: $e_T(t) = e_1(t) + e_2(t) = E_{0T} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_T)$

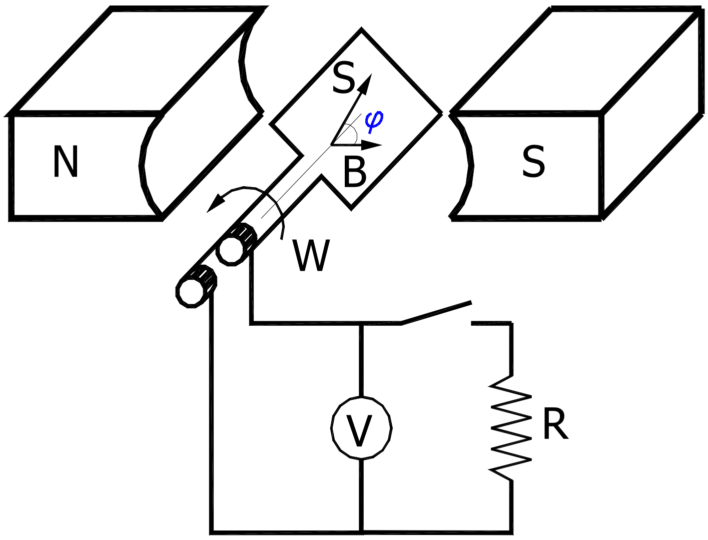
Esta propiedad, junto a la anterior nos determina que si la excitación de un circuito, es de tipo senoidal, la respuesta en cualquier punto del sistema, también lo es. Lógico ya que si en un circuito solo existen elementos lineales las únicas operaciones que podemos realizar al resolverlo sobre las ondas senoidales son la suma o resta y la integración o derivación.

4) Admite una representación exponencial (según EULER $e^{j\theta} = \cos\theta +$ $+ j \operatorname{sen}\theta$) lo que permite operar con vectores giratorios denominados fasores que admiten una representación en el plano complejo. Por ello la teoría de circuitos en C.A. senoidal utiliza como base los números complejos.

5) Una onda periódica no senoidal, permite mediante el desarrollo en serie de Fourier, ser descompuesta en un número, teóricamente infinito, de funciones senoidales y cosenoidales de frecuencias múltiplos de la fundamental (Armónicos). La serie de Fourier es rápidamente convergente por lo que no es preciso más que tomar unos pocos términos. Esto implica, que si las variaciones de tensión o de intensidad presentes en un circuito, no son sinusoidales, pero si periódicas, el comportamiento del circuito puede estudiarse **por superposición de ondas senoidales** obtenidas mediante el desarrollo en serie de Fourier de la original .

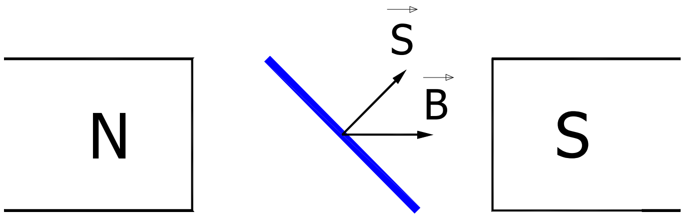
4.3.1.- GENERACIÓN DE UNA TENSIÓN ALTERNA SENOIDAL

Vamos a suponer una espira plana de superficie, "**S**", que se halla en el seno de un campo magnético "$\overline{\mathbf{B}}$" uniforme en todo el espacio que ocupa la espira y girando en torno a un eje perpendicular al campo a razón de "**ω**" rad/sg.



El flujo del campo magnético ,"Φ", a través de la espira depende de la orientación de la espira respecto al campo

$$\Phi = \int_S \overline{B} \bullet \overline{ds} = \overline{B} \bullet \int_S \overline{ds} = \overline{B} \bullet \overline{S} = B\,S\cos\varphi$$



según Faraday la f.e.m. inducida, será:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(B\,S\cos\varphi)}{dt} = -BS(-\mathrm{sen}\,\varphi)\frac{d\varphi}{dt}$$

como: $\varphi = \omega\,t + \varphi_0$

resulta: $\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega$ por lo que: $\varepsilon = B\,S\,\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi = E_0\,\mathrm{sen}\,\varphi = E_0\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi_0)$

siendo $E_0 = B\,S\,\omega$ su valor máximo.

A la velocidad de giro de la espira se le llama pulsación.

Si a esta espira tenemos conectada una resistencia R cerrando el circuito la intensidad que circularía por la misma sería:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BS\omega}{R} \text{ sen } (\varphi_0 + \omega t) = I_0 \text{ sen } (\varphi_0 + \omega t)$$

siendo $I_0 = \dfrac{BS\omega}{R}$ la intensidad instantánea máxima que circularía por la resistencia.

Ejemplo: Vamos a suponer que tenemos una bobina circular de 10.000 espiras y radio 5'614 Cm girando en un campo magnético de 0'01 T uniforme con una frecuencia de 50 Hz.

La f.e.m. inducida en la bobina en cada instante será:

$$\varepsilon = 0'01\ (10.000 \cdot \pi \cdot 0'05614^2) \cdot (2 \cdot \pi \cdot 50)\ sen\ (\varphi_0 + 100\ \pi\ t) = 311'06\ sen\ (\varphi_0 + 100\ \pi\ t)$$

siendo el valor máximo de esta fuerza electromotriz : 311'06 V

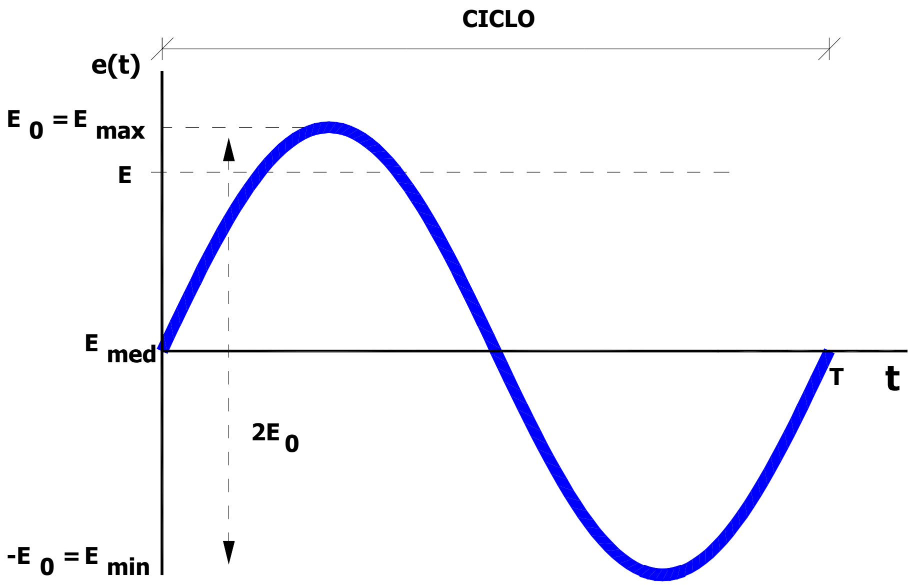
y su valor eficaz será: $\dfrac{311'06}{\sqrt{2}} = 220$ V

Lo explicado anteriormente es la base del dispositivo más sencillo para obtener corriente alterna, el alternador. Consiste en una bobina que gira alrededor de un eje, estando los terminales de ésta conectados a anillos concéntricos con el eje de giro y que giran solidariamente con él. La bobina queda conectada al circuito exterior por medio de escobillas deslizantes sobre la periferia de los anillos. La bobina esta inmersa en un campo magnético $\overline{B}$ uniforme, creado por un imán que recibe el nombre de inductor. La bobina giratoria se llama comúnmente inducido.

4.3.2.- VALORES ASOCIADOS A LAS ONDAS SENOIDALES

En una onda senoidal del tipo:

$$\mathbf{e = E_0\ sen\ (\omega t + \varphi)}$$



se tendrá:

Valor de cresta máximo: $\mathbf{E_{máx} = E_0}$

Valor de cresta mínimo: $\mathbf{E_{min} = - E_0}$

Amplitud o valor de cresta: $\mathbf{E_C = E_0}$

Valor de cresta a cresta: $\mathbf{E_{pp} = E_{máx} - E_{min} = 2\ E_0}$

Valor medio

El valor medio de la onda senoidal en un período T es nulo por lo que hemos de definirlo en un semiperiodo T/2:

$$E_m = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} E_0\ \text{sen}\ \omega t\ dt = \frac{2E_0}{T}\int_0^{T/2}\text{sen}\ \omega t\ dt =$$

$$= \frac{-2E_0}{\omega\ T}\left[\cos\ \omega t\right]_0^{T/2} = \frac{-2E_0}{2\pi}\left(\cos\ \pi - \cos\ 0\right) = \frac{2E_0}{\pi} = 0{,}64\ E_O$$

(Nota: ω T = 2 π)

Valor eficaz

El valor eficaz (R.M.S.) puede calcularse en un período ya que no se anula por ser el valor cuadrático medio.

$$E^2 = \frac{1}{T}\int_0^T E_0^2\, sen^2\, \omega t\, dt = \frac{E_0^2}{T}\int_0^T sen^2 \omega t\, dt =$$

$$= \frac{E_0^2}{T}\int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}\, dt = \frac{E_0^2}{T}\left[\frac{t}{2} - \frac{sen\, 2\omega t}{4\omega}\right]_0^T = \frac{E_0^2}{2}$$

una vez operado y teniendo en cuenta que ω T = 2 π resulta:

$$\boxed{E = \frac{E_0}{\sqrt{2}}} = 0{,}707\ E_O$$

Factor de amplitud o cresta

$$F_c = \frac{E_0}{E} = \frac{E_0}{E_0 / \sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Factor de forma

$$F_f = \frac{E}{E_m} = \frac{E_0 / \sqrt{2}}{\frac{2E_0}{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1'11$$

Cuando se dice que en nuestros domicilios tenemos una tensión de 220 V, significa que los 220 V es el valor eficaz de una onda alterna sinusoidal de tensión que tiene una amplitud de $220\sqrt{2}$, y un valor de pico a pico de 622'4 V.

Si un dispositivo eléctrico de nuestro domicilio consume 10 A, esta cantidad es el valor eficaz de la onda alterna senoidal de corriente eléctrica que atraviesa el dispositivo.

El identificar a las ondas senoidales por su valor eficaz es debido a que, como veremos más adelante, los valores que nos indican los aparatos utilizados para medir señales eléctricas alternas, son siempre valores eficaces.

4.3.3.- REPRESENTACIÓN CARTESIANA: EXPRESIÓN DE FOURIER

La onda senoidal, se puede expresar también como una función coseno, donde el ángulo de fase inicial sería diferente, pero ambas funciones nos representa a la mima onda. Por eso a partir de ahora hablamos de la **onda sinusoidal** para referirnos a la senoidal o cosenoidal. Veamos seguidamente su equivalencia:

Sean las funciones sinusoidales:

$$e(t) = \sqrt{2}\ E\ sen\ (\omega t \mp \varphi_1)$$
$$e(t) = \sqrt{2}\ E\ \cos\ (\omega t \mp \varphi_2)$$

siendo: E valor eficaz de la función periódica

ω pulsación de la onda

φ_1 ángulo de fase inicial de la onda seno (desfase)

φ_2 ángulo de fase inicial de la onda coseno (desfase)

Ambas funciones tienen igual valor máximo, igual pulsación, pero diferente fase inicial, veamos cuando una y otra son equivalentes

En la representación de la función coseno, $\boldsymbol{\varphi_2}$ es el ángulo dado por $\boldsymbol{\omega t_2}$, siendo $\boldsymbol{t_2}$ el valor que hace que la función adquiera el valor de cresta (+) más próximo.

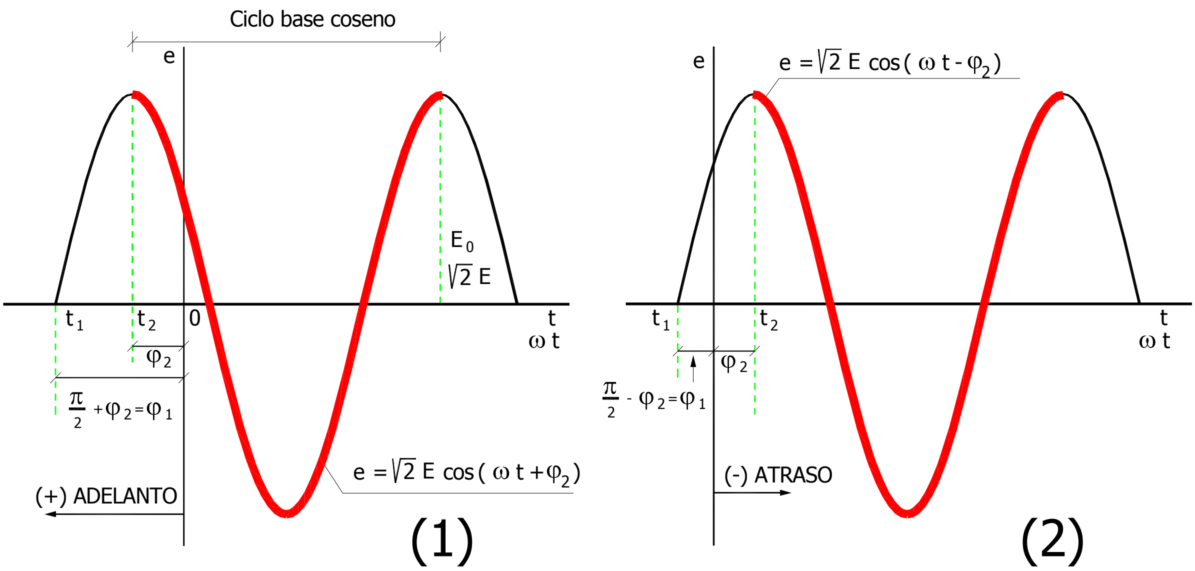


Fig. Representación cartesiana de la función coseno

En (1) el máximo valor de cresta $\mathbf{E_{max}}$ tiene lugar en un ángulo $\boldsymbol{\varphi_2}$ en adelanto.

En (2) el máximo valor de cresta $\mathbf{E_{max}}$ tiene lugar en un ángulo $\boldsymbol{\varphi_2}$ atrasado.

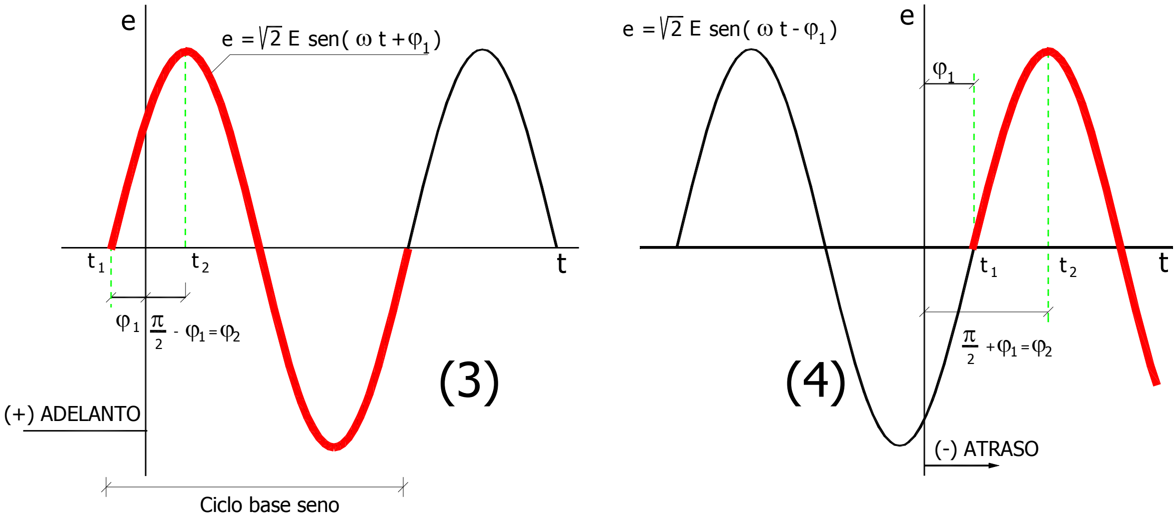


Fig. Representación cartesiana de la función seno

En la gráfica de la función seno, $\boldsymbol{\varphi_1}$ es el ángulo dado por $\boldsymbol{\omega t_1}$, siendo $\mathbf{t_1}$ el valor que hace que la función adquiera el valor cero más próximo, en sentido ascendente.

Las funciones (1) y (2) expresadas en forma de seno son:

$$e(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \varphi_2) = \sqrt{2}E \, sen \, (\omega t + \pi/2 + \varphi_2) \qquad (1)$$

$$e(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t - \varphi_2) = \sqrt{2}E \, sen \, (\omega t + \pi/2 - \varphi_2) \qquad (2)$$

Las funciones (3) y (4) expresadas en forma de coseno son:

$$e(t) = \sqrt{2}E \, sen \, (\omega t + \varphi_1) = \sqrt{2}E \cos(\omega t - \pi/2 + \varphi_1) \qquad (3)$$

$$e(t) = \sqrt{2}E \, sen \, (\omega t - \varphi_1) = \sqrt{2}E \cos(\omega t - \pi/2 - \varphi_1) \qquad (4)$$

Podemos observar que aunque la expresión matemática sea diferente la representación gráfica es la misma, o sea, la variación de la señal con el tiempo es la misma independiente de si escojemos la onda seno como ciclo base o la onda coseno. **En estos apuntes se escojera la onda seno como la representación matemática de este tipo de onda**.

NOTA: Las anteriores expresiones de la función sinusoidal (senoidal o cosenoidal) se pueden describir mediante combinación lineal de las funciones seno y coseno, de la siguiente forma:

$$e(t) = E_0\, sen\, (\omega t + \varphi) = a \cos \omega t + b\ sen\ \omega t$$

$$e(t) = E_0 \cos\, (\omega t + \varphi) = a \cos \omega t + b\ sen\ \omega t$$

Las constantes *a* y *b* se denominan **Coeficientes de Fourier** y se definen por *a=e(0)* y *b=e(T/4)* siendo *T* el período de la función. Estos coeficientes tienen las mismas unidades que la onda (Voltios o amperes) y cualquiera de ellos, o ambos, pueden ser negativos.

Los coeficientes de Fourier para la función seno valen:

$$a = e(0) = E_0\ sen\ (\varphi)$$

$$b = e(T/4) = E_0\ sen \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = E_0 \cos \varphi$$

Además, cumplen las siguientes relaciones:

$$a^2 + b^2 = E_0^2 \left(\cos^2 \varphi + sen^2 \varphi\right) \quad \rightarrow \quad E_0 = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\frac{a}{b} = tg\ \varphi \quad \rightarrow \quad \varphi = \text{arc}\ tg\ \frac{a}{b}$$

Por lo que si tengo que encontrar la suma de una onda seno más una coseno podremos hacerlo de la siguiente forma:

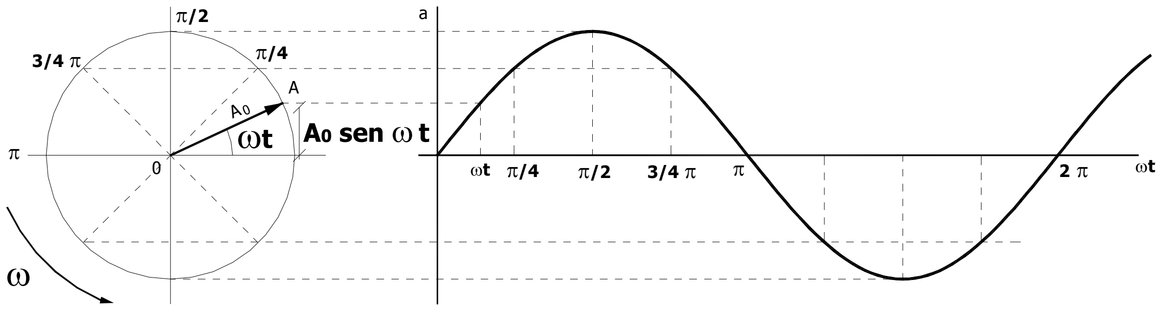
$$e(t) = a \cos \omega t + b\ sen\ \omega t = E_0\, sen\, (\omega t + \varphi) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\ sen\ (\omega t + \text{arc}tg(\frac{a}{b}))$$

Con las expresiones anteriores podemos pasar de un tipo de expresión a otro tipo.

4.3.4.- REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA SENOIDAL

Consideremos la onda senoidal $a = A_0 \text{ sen } \omega t$. En matemáticas se dice que una senoide se engendra por la proyección sobre cualquier eje fijo de un vector giratorio, $\overline{OA}$, tal y como se indica en la figura, en el que el punto A recorre una circunferencia de radio $\mathbf{A_0}$ con un movimiento circular uniforme de velocidad angular **ω** y sentido contrario a las agujas del reloj.



Para el instante **t** considerado, el vector giratorio ha de formar con el eje horizontal un ángulo de valor **ωt**. A este vector giratorio, para distinguirlo de los vectores normales se le llama **VERSOR** y puede ser considerado como complejo. Recordando la formula de Euler:

$$e^{(\omega t) j} = \cos \omega t + j \, sen \, \omega t$$

siendo $j = \sqrt{-1}$ (unidad imaginaria) y multiplicando por A_0 los dos términos de la igualdad se obtendrá un vector giratorio en el plano de los números complejos:

$$A_0 \, e^{(\omega t) j} = A_0 \cos \omega t + j \, A_0 \, sen \, \omega t$$

El vector giratorio o versor en su representación exponencial, polar y cartesiana será:

$$A_0 e^{(\omega t) j} = A_0 \, |\underline{\omega t} = A_0 \, (\cos \omega t + j \text{ sen } \omega t)$$

Exponencial Polar Cartesiana

A esta representación del vector giratorio considerado como complejo es a lo que se llama **representación simbólica**.

El valor instantáneo de la señal puede expresarse por: $a = P_{img} \, (A_0 \, e^{j\omega t})$

donde P_{img} representa la operación de tomar la parte imaginaria del complejo, o sea:

$$a = P_{img} \, (A_0 \, e^{j\omega t}) = P_{img}[A_0(\cos \omega t + j \, sen \, \omega t)] = A_0 \, sen \, \omega t$$

4.3.5.- DEFINICIÓN DE FASOR

Si consideramos la onda

$$a = A_0 \text{ sen } (\omega t + \varphi_0) = \sqrt{2} A \text{ sen } (\omega t + \varphi_0)$$

el vector giratorio de radio $\mathbf{A_0 = \sqrt{2}\ A}$ y velocidad de giro $\boldsymbol{\omega}$ supone el entendimiento de la evolución de la onda senoidal con el tiempo, su representación simbólica será:

$$\sqrt{2}\, A\, e^{(\omega t + \varphi_0) j} = (\sqrt{2}\, A\, e^{\varphi_0 j})\, e^{\omega t j} \quad \text{Forma exponencial}$$

$$\sqrt{2}\, A \,|\underline{\omega t + \varphi_0} = (\sqrt{2}\, A \,|\underline{\varphi_0}\,) \times 1 |\underline{\omega t} \quad \text{Forma polar}$$

La representación entre paréntesis representa un vector situado en el plano complejo que no depende del tiempo; o sea, un nº complejo en su forma exponencial.

A este numero complejo es a lo que en Electrotecnia se le llama **FASOR**. Este número complejo o vector es el vector giratorio en el momento de t=0.

Sin embargo, en Electrotecnia, no es el valor máximo el que tiene importancia sino el valor eficaz por lo que **el fasor se representa con una magnitud igual al valor eficaz de la señal**. Para la onda anterior, el fasor será:

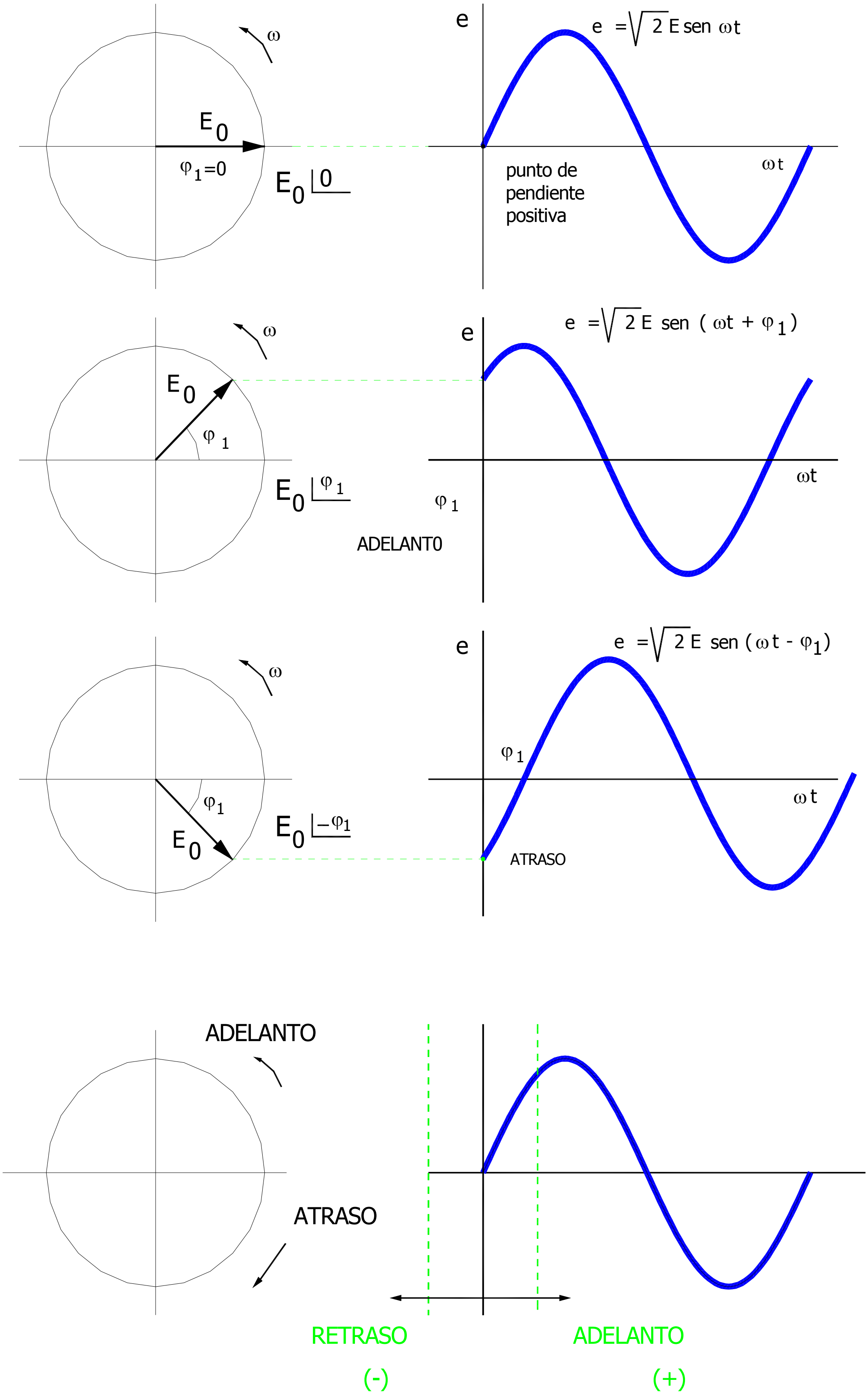
$$\overline{A} = A\, e^{\varphi_0 j} = A \,|\underline{\,\varphi_0}$$

La obtención de la respuesta de un determinado circuito eléctrico, haciendo uso de la forma instantánea de las funciones sinusoidales, resulta complicado. Ahora bien, podemos simplificar los cálculos recurriendo a los fasores ya que estos nos representan a estas ondas.

De esta forma, el análisis no se hace en el dominio del tiempo, lo que obligaría a la resolución de determinadas ecuaciones diferenciales, sino que se realiza en el campo de los números complejos (dominio de las frecuencias) en el que dichas ecuaciones se convierten en algebraicas. Al final del proceso se puede deshacer el cambio, restituyendo a las magnitudes eléctricas su carácter de funciones del tiempo (pasamos del dominio frecuencial al temporal).

$$a = \sqrt{2} A \text{ sen } (\omega t + \varphi_0) \;\rightarrow\; \underbrace{\sqrt{2}\, A \,|\underline{\omega t + \varphi_0}}_{\text{Representación Simbólica}} \;\rightarrow\; \underbrace{\sqrt{2}\, A \,|\underline{\varphi_0}}_{\text{Fasor}} \;\rightarrow\; \underbrace{A \,|\underline{\varphi_0}}_{\text{Fasor}}$$

Cada fasor representa a una única onda senoidal, y nos da toda la información que nos interesa que es el valor eficaz y el ángulo de fase inicial.



4.3.6.- REPRESENTACIÓN FASORIAL DE LAS MAGNITUDES ELÉCTRICAS SENOIDALES DE IGUAL FRECUENCIA Y DIFERENTE FASE

Sean los valores instantáneos de la tensión e intensidad de la corriente:

$$u = U_0 \text{ sen } (\omega t + \varphi_1) = \sqrt{2}\, U \text{ sen } (\omega t + \varphi_1)$$

$$i = I_0 \text{ sen } (\omega t + \varphi_2) = \sqrt{2}\, I \text{ sen } (\omega t + \varphi_2)$$

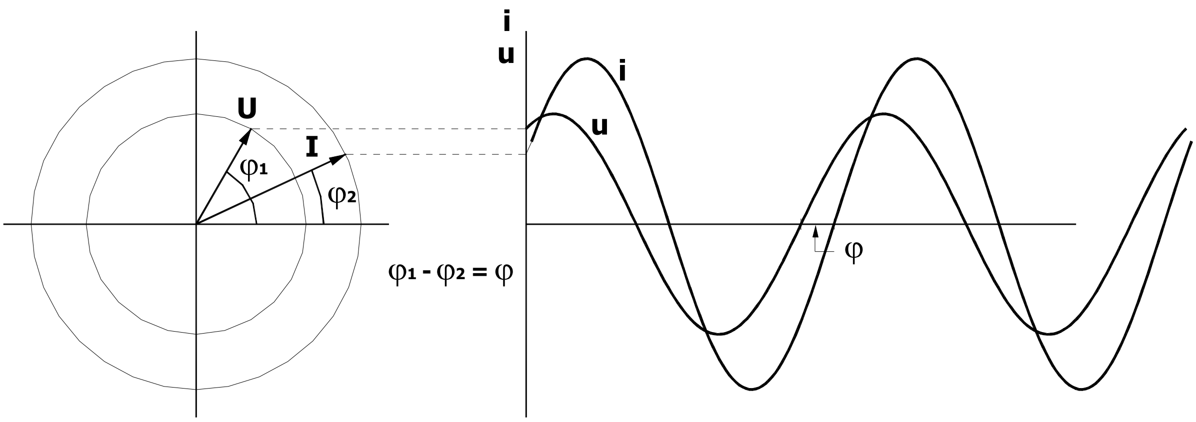
el vector giratorio para t=0 o fasor de ambas funciones será:

$$\overline{U} = U\, e^{\varphi_1 j} = U \,|\underline{\ \varphi_1\ } \qquad\qquad \overline{I} = I\, e^{\varphi_2 j} = I \,|\underline{\ \varphi_2\ }$$

siendo el vector giratorio en ambos casos:

$$\sqrt{2}\, U \,|\underline{\ \omega t + \varphi_1\ } \qquad\qquad \sqrt{2}\, I \,|\underline{\ \omega t + \varphi_2\ }$$

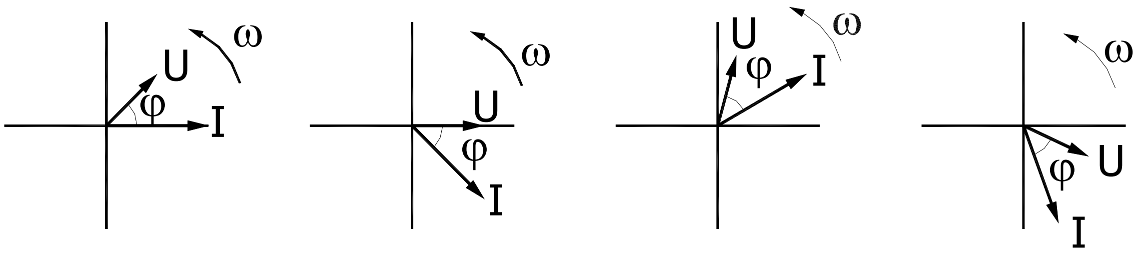
Al ángulo que existe entre estos dos vectores le llamaremos **ángulo de fase**, y cuando existe esta diferencia de fase entre las dos magnitudes eléctricas decimos que se ha producido un desfase.



Desfase entre $\hat{UI} = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi$

u e **i** están desfasadas un ángulo φ

Este ángulo de fase, φ , es muy importante para la resolución de problemas en circuitos de corriente alterna. Además, de su valor absoluto, hay que asignarle un sentido vectorial que indique si una magnitud está en el tiempo, adelantada o retrasada con respecto a otra de referencia. Desfase positivo o desfase negativo respectivamente. De las figuras siguientes



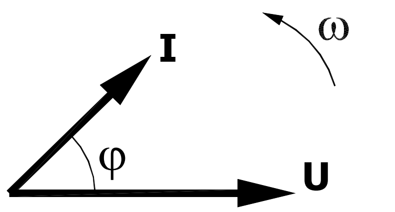
podemos decir:

u está adelantada respecto a **i** un ángulo φ

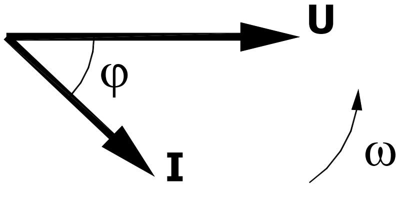
i está retrasada respecto a **u** un ángulo φ.

Recordaremos que estos vectores son vectores giratorios de igual velocidad angular lo que implica que el desfase lo mantienen a lo largo del tiempo.

En Electrotecnia, la intensidad se refiere a la tensión, esto implica que podemos hablar de:



I adelantada respecto a U, desfase negativo (- φ)



I retrasada respecto a U, desfase positivo (+ φ)

El desfase entre los fasores en cualquier instante es el mismo, pues estos vectores giratorios giran a la misma velocidad y como podemos observar da igual trabajar con valores máximos que eficaces.

En los **diagramas fasoriales** (**representación de los fasores en el plano de los números complejos**) normalmente trabajaremos con valores eficaces.

Ejercicio

:

En la función senoidal $u = 537{,}4\ sen\ (100\ \pi\ t + \frac{\pi}{3})$ indicar:

a) Pulsación, frecuencia y fase inicial.
b) Valor de cresta máxima, mínima, amplitud.
c) Valor de Cresta a Cresta
d) Valor Medio
e) Valor Eficaz.
d) Fasor correspondiente

Solución:

a) Pulsación: $100\ \pi$ rad/s

Frecuencia: $\omega\ T = \frac{\omega}{f} \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100\pi}{2\pi} = 50$ Ciclos/sg $= 50$ Hz.

Fase inicial: $\pi/3$ radianes = 60º

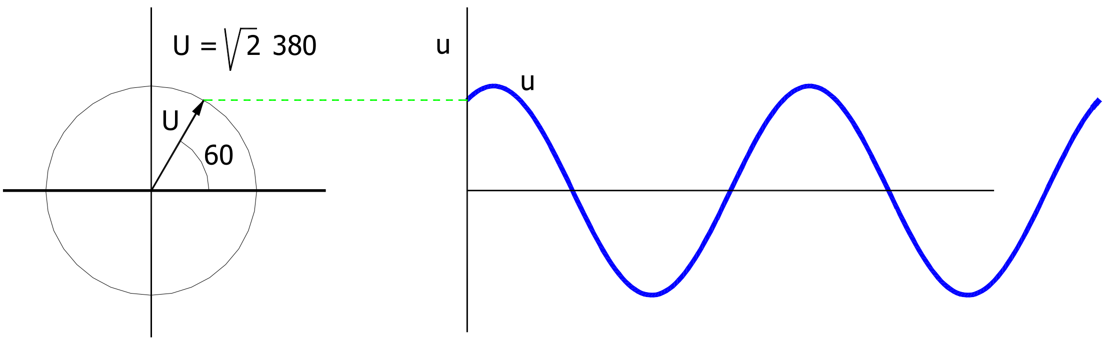
b) Valor de cresta máximo: $U_{max} = 537{,}4$ V.
Valor de cresta mínimo: $U_{min} = -537{,}4$ V.
Amplitud: $U_0 = 537{,}4$ V.

c) Valor de cresta a cresta: $U_{CC} = 537{,}4 - (-537{,}4) = 1074{,}8$ V.

d) Valor medio: $U_{med} = \frac{2\ U_0}{\pi} = \frac{2 \times 537{,}4}{\pi} = 342{,}11$ V.

e) Valor eficaz: $U = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 380$ V.

d) $\bar{U} = 380 \underline{|\ 60}$



Ejercicio

Una onda alterna senoidal de tensión de valor eficaz 380 V y frecuencia 50 Hz toma el valor de 537,4 V para el instante inicial. Calcular la expresión algebraica de la onda y su fasor correspondiente.

***Solución*:** Una onda senoidal tendrá por expresión $u = U_0 \text{ sen } (\omega t + \varphi) = \sqrt{2}\, U \text{ sen } (\omega t + \varphi)$ sustituyendo valores se tendrá $u = \sqrt{2}\, 380 \text{ sen } (100\, \pi\, t + \varphi)$ para el instante inicial

$$u(0) = \sqrt{2}\, 380 \text{ sen } (\varphi) = 537{,}4 \text{ V}$$

por lo tanto $\text{sen } \varphi = \dfrac{537{,}4}{\sqrt{2}\, 380} = 1 \rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

y la onda sería $u = \sqrt{2}\, 380 \text{ sen } (100\, \pi\, t + \dfrac{\pi}{2})$

el fasor tendrá por expresión: $\overline{U} = 380 \underline{|\ 90}$

Ejercicio

Determinar el desfase entre la onda de tensión anterior y las ondas de intensidad de valores:

$$i_1 = \sqrt{2}\, 255 \text{ sen } (100\, \pi\, t + 3\pi / 4) \quad \text{e} \quad i_2 = \sqrt{2}\, 310 \text{ sen } (100\, \pi\, t + \pi / 4)$$

***Solución*:** Los fasores representativos de estas dos ondas serán:

Fasor de $i_1(t)$ –> $\overline{I}_1 = 255 \underline{|\ 135^\circ}$

Fasor de $i_2(t)$ –> $\overline{I}_2 = 310 \underline{|\ 45^\circ}$

por lo que el desfase entre las ondas valdrá:

desfase $i_1(t) - u(t)$: 90º - 135º = - 45º (adelanto)

desfase $i_2(t) - u(t)$: 90º - 45º = 45º (atraso)

4.3.7.- SUMA DE DOS ONDAS SENOIDALES DE IGUAL FRECUENCIA Y DIFERENTE FASE

Si aplicamos las condiciones impuestas a las conexiones o leyes de Kirchhoff a un circuito excitado con ondas alternas nos encontraremos que tendremos que sumar o restar ondas alternas de diferente amplitud y fase inicial pero de igual pulsación (porque esta se mantiene). Veamos pues como se puede sumar fácilmente ondas alternas.

Sean dos ondas senoidales de expresión:

$$e_1 = E_{01} \text{ sen } (\omega t + \varphi_1) \; (1)$$

$$e_2 = E_{02} \text{ sen } (\omega t + \varphi_2) \; (2)$$

La suma tendrá por expresión:

$$e_t = e_1 + e_2 = E_{01} \text{ sen } (\omega t + \varphi_1) + E_{02} \text{ sen } (\omega t + \varphi_2)$$

si queremos conocer los valores instantáneos, $\mathbf{e_t}$, será suficiente con ir dando valores a **t**, pero si queremos conocer su valor eficaz, lo mejor será realizar la suma. Para ello lo haremos utilizando los coeficientes de Fourier.

$$e_1 = E_{01} \text{ sen } (\omega t + \varphi_1) = \quad a_1 \cos \omega t + b_1 \text{ sen } \omega t \qquad (1)$$

$$e_2 = E_{02} \text{ sen } (\omega t + \varphi_2) = \quad a_2 \cos \omega t + b_2 \text{ sen } \omega t \qquad (2)$$

$$e_T = e_1 + e_2 = (a_1 + a_2) \cos \omega t + (b_1 + b_2) \text{ sen } \omega t =$$

$$= a_T \cos \omega t + b_T \text{ sen } \omega t = \sqrt{a_T^2 + b_T^2} \text{ sen } \left(\omega t + \text{arctg } \frac{a_T}{b_T} \right) =$$

$$= \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2} \text{ sen } \left(\omega t + \text{arctg } \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} \right) =$$

$$= E_{0T} \text{ sen } (\omega t + \varphi_T) \qquad (3)$$

donde: $E_{0T} = \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$

$$\varphi_T = \text{arctg} \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$$

sabiendo que: $a_1 = E_{01} \text{ sen } (\varphi_1)$; $b_1 = E_{01} \cos (\varphi_1)$ coeficientes de fourier de la onda e_1
$a_2 = E_{02} \text{ sen } (\varphi_2)$; $b_2 = E_{02} \cos (\varphi_2)$ coeficientes de fourier de la onda e_2

Observamos que el resultado (3) es otra onda senoidal de igual pulsación, diferente amplitud y desfase inicial.

Podemos llegar al mismo resultado sumando los fasores representativos de las ondas e_1 y e_2. Trabajando con valores máximos en lugar de eficaces:

$$\overline{E}_1 = E_{01}\,|\underline{\varphi_1} = E_{01}\cos(\varphi_1) + j\,E_{01}\,\mathrm{sen}(\varphi_1) = b_1 + j\,a_1 \qquad \text{Fasor de la onda (1)}$$

$$\overline{E}_2 = E_{02}\,|\underline{\varphi_2} = E_{02}\cos(\varphi_2) + j\,E_{02}\,\mathrm{sen}(\varphi_2) = b_2 + j\,a_2 \qquad \text{Fasor de la onda (2)}$$

$$\overline{E}_T = E_{0T}\,|\underline{\varphi_T} = E_{01}\,\underline{|\varphi_1} + E_{02}\,\underline{|\varphi_2} =$$

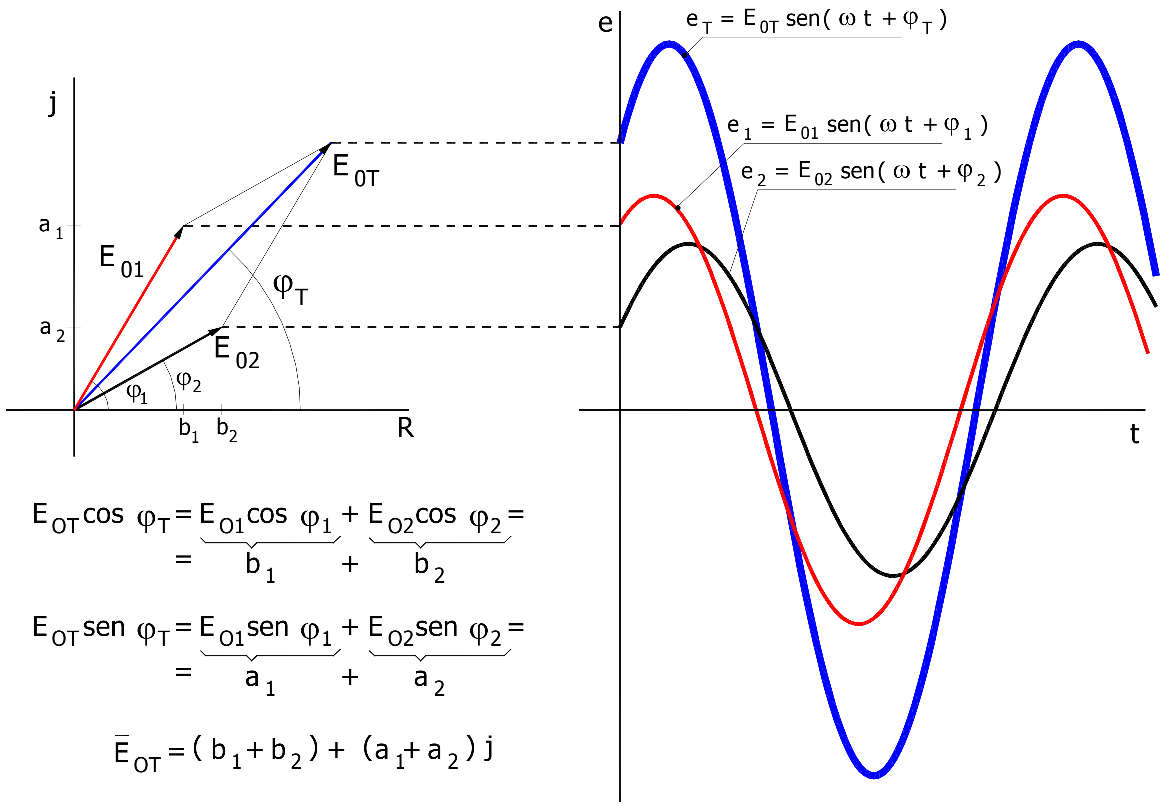
$$= (E_{01} + E_{02})\cos(\varphi_1) + j\,(E_{01} + E_{02})\,\mathrm{sen}(\varphi_1) =$$

$$= (b_1 + b_2) + j\,(a_1 + a_2) =$$

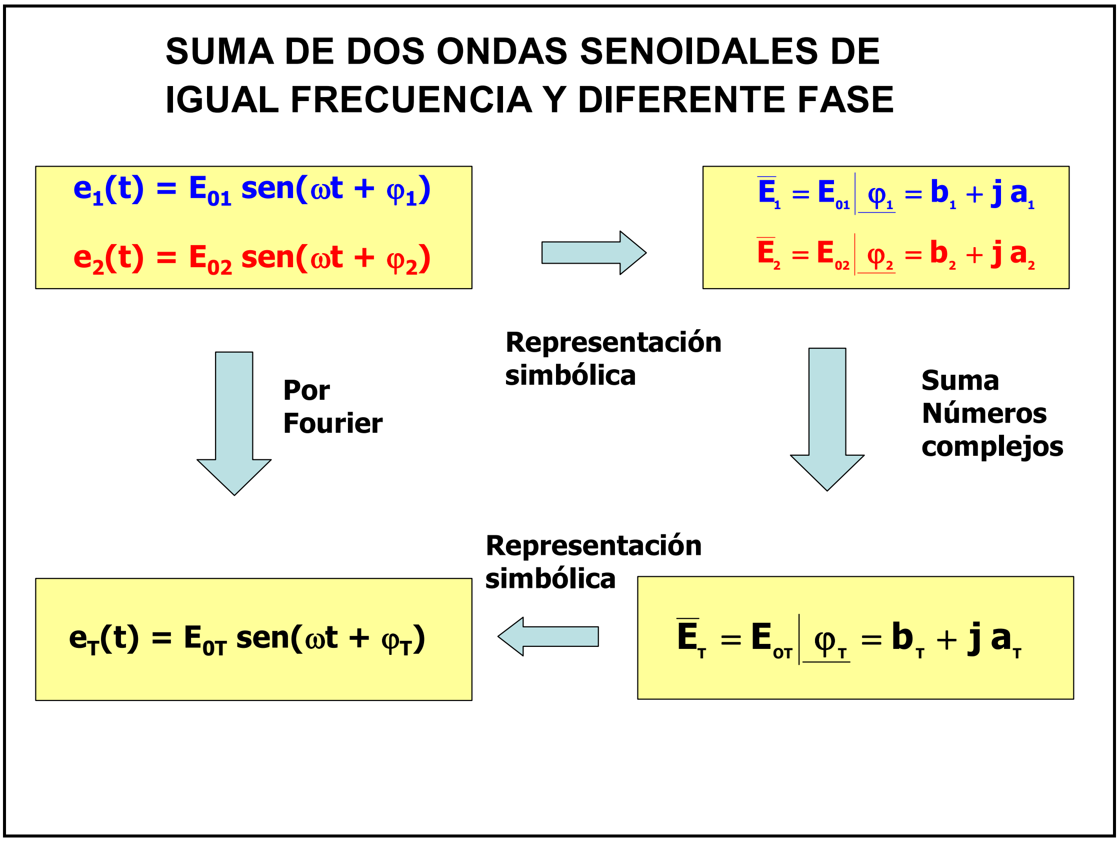
$$= \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}\;|\underline{\mathrm{arctg}((a_1+a_2)/(b_1+b_2))} = E_{0T}\,|\underline{\varphi_T}$$

que es el fasor representativo de la onda suma, la misma que la calculada anteriormente por los coeficientes de Fourier.

El diagrama fasorial y cartesiano de las operaciones anteriores serán:



Si expresamos las ondas e_1 y e_2 en su forma compleja binómica, es muy fácil hallar la suma, y es por este motivo, por lo que se utiliza el cálculo vectorial simbólico, por su sencillez en la suma, y como veremos posteriormente, en la derivada e integral, que son las operaciones que se realizan en el análisis de circuitos con ondas alternas senoidales.



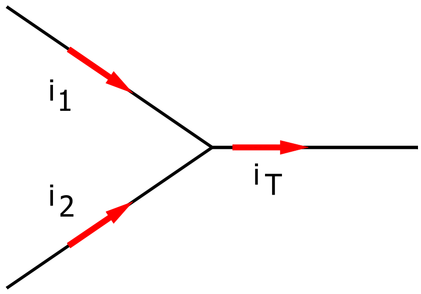
Otra ventaja importante de este procedimiento para sumar o restar funciones senoidales a partir de sus fasores es el hecho de poder elegir como origen de tiempos el instante más conveniente, ya que un cambio en el origen de tiempos significa cambiar las fases de todas las ondas en el mismo ángulo, lo que no alterara la resolución del circuito. Para simplificar los problemas suele elegirse el instante en el que la fase de alguna de las ondas es igual a cero, y en esa situación se realizan los cálculos pertinentes y se estudian los adelantos y retrasos de unas ondas respecto a otras.

Ejemplo: *En un nudo de un circuito eléctrico concurren tres ramas, siendo el valor de las intensidades que circulan por ellas i_1, i_2, i_T conociéndose dos de ellas. Calcular la tercera.*

$$i_1 = 240 \text{ sen } (314 \, t + 20^{\circ})$$

$$i_2 = 210 \text{ sen } (314 \, t + 80^{\circ})$$

radianes grados



Solución:

a) Por Fourier:

$$i_1 = a_1 \cos 314t + b_1 \text{ sen } 314t = 82{,}08 \cos 314t + 225 \text{ sen } 314t$$

$$i_2 = a_2 \cos 314t + b_2 \text{ sen } 314t = 206{,}8 \cos 314t + 36{,}466 \text{ sen } 314t$$

$$i_T = i_1 + i_2 = 288{,}9 \cos 314\,t + 261{,}97 \text{ sen } 314t =$$

$$= \sqrt{288{,}9^2 + 261{,}97^2} \text{ sen } (314t + \text{arc tg } \frac{288{,}9}{261{,}97})$$

$$i_T = 389{,}99 \text{ sen } (314\,t + 47{,}798)$$

b) Por la forma binómica:

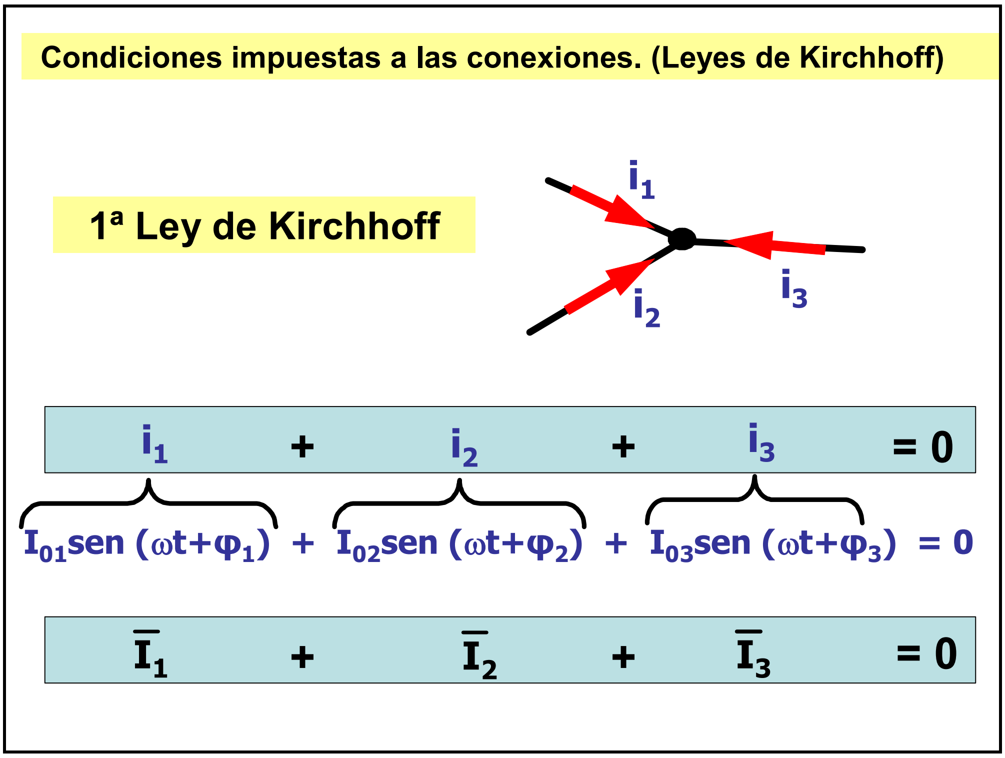
$$\overline{I}_1 = \frac{240}{\sqrt{2}} \angle 20 = \frac{225{,}5}{\sqrt{2}} + j\,\frac{82{,}68}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{I}_2 = \frac{210}{\sqrt{2}} \angle 80 = \frac{36{,}46}{\sqrt{2}} + j\,\frac{206{,}8}{\sqrt{2}}$$

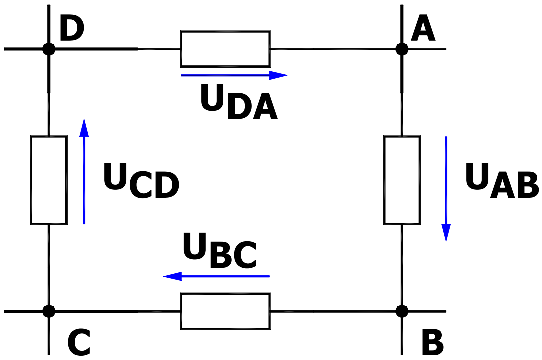
$$\overline{I}_T = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 = \frac{261{,}9}{\sqrt{2}} + j\,\frac{288{,}9}{\sqrt{2}} = \frac{389{,}99}{\sqrt{2}} \angle 47{,}8$$

$$\mathbf{i_T = 389{,}99 \text{ sen } (314\,t + 47{,}798)}$$

Con este ejemplo se puede observar que la primera ley de kirchhoff se puede aplicar con fasores



Ejemplo: *Determinar la diferencia de potencial entre A y B conociendo las tensiones* u_{BC}, u_{CD} *y* u_{DA}.



$u_{BC}(t) = 240\ \text{sen}(314\ t + 20º)$

$u_{CD}(t) = 210\ \text{sen}(314\ t + 80º)$

$u_{DA}(t) = 390\ \text{sen}(314\ t + 48º)$

Solución: Aplicando el segundo lema a lo largo de la malla:

$$u_{AB} + u_{BC} + u_{CD} + u_{DA} = 0$$

de donde : $u_{BC} + u_{CD} + u_{DA} = -\,u_{AB}$

Para realizar esta suma determinamos los fasores representativos de cada onda:

$$\overline{U}_{BC} = 240\ \underline{|20} = 225{,}5 + j\ 82{,}08$$

$$\overline{U}_{CD} = 210\ \underline{|80} = 36{,}46 + j\ 206{,}8$$

$$\overline{U}_{DA} = 390\ \underline{|48} = 261{,}9 + j\ 288{,}9$$

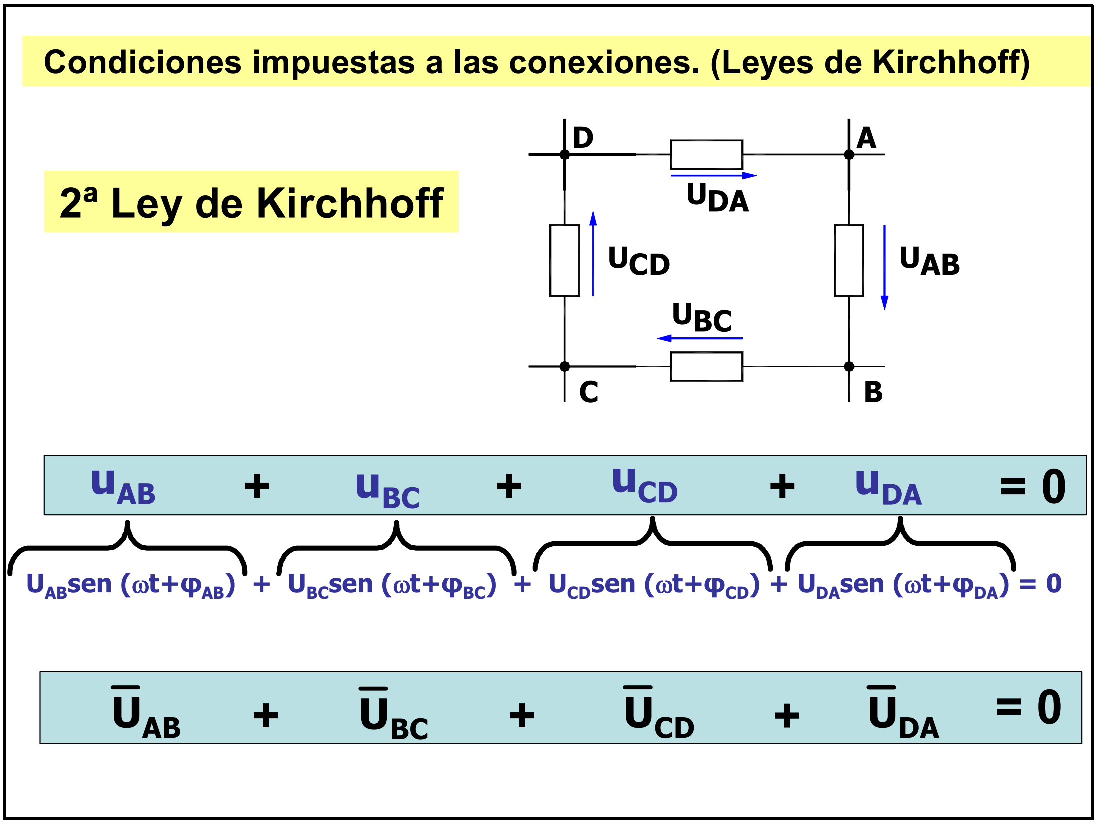
Sumando estos tres fasores, se obtendrá: $-\overline{U}_{AB} = 780 \angle 48 = 523{,}8 + j\,577{,}8$ por lo que el fasor correspondiente la tensión pedida valdrá:

$$\overline{U}_{AB} = 780 \angle 228 = -523{,}8 - j\,577{,}8$$

y la onda alterna existente entre A y B tendrá por expresión:

$$\mathbf{u_{AB}(t) = 780\ sen(314\ t + 228^{o})}$$

Con este ejemplo se puede ver que la segunda ley de kirchhoff se puede aplicar con fasores



Por tanto, como conclusión del tema, podemos decir que las condiciones impuestas a las uniones de los elementos o leyes de kirchooff son aplicables con fasores.