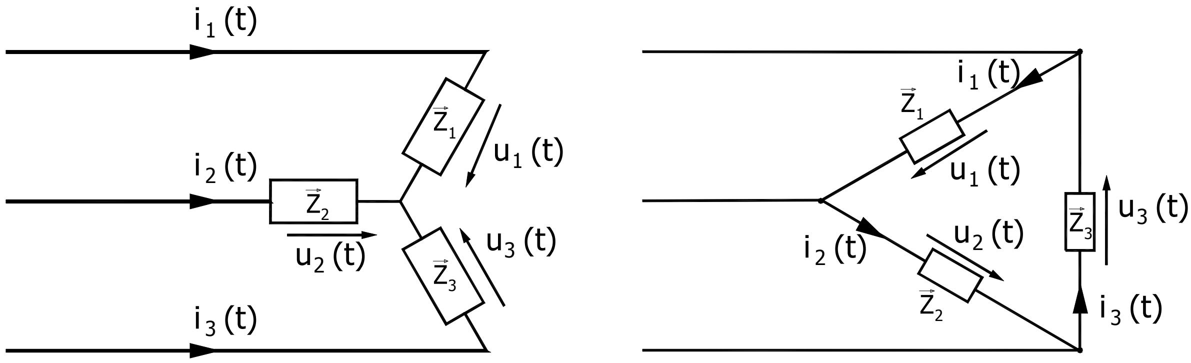
TEMA 9

POTENCIA EN SISTEMAS TRIFÁSICOS.

9.1. Potencias en sistemas equilibrados y simétricos en tensiones

Un sistema trifásico puede considerarse como 3 circuitos monofásicos, por lo que la potencia total instantánea transferida a un circuito trifásico será la suma de las potencias instantáneas transferidas a cada uno de los tres sistemas monofásicos que lo forman.



Si denominamos a $u_1(t)$, $u_2(t)$ y $u_3(t)$ a las tensiones instantáneas aplicadas a cada impedancia $\overline{Z}_1$, $\overline{Z}_2$ y $\overline{Z}_3$ respectivamente e $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$ las intensidades de las corrientes que la recorren, la potencia instantánea transferida a la carga trifásica tendrá por expresión:

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = u_1\, i_1 + u_2\, i_2 + u_3\, i_3 = \sum_{K=1}^{K=3} u_K(t)\, i_K(t)$$

(expresión válida, independientemente de si el sistema es equilibrado o desequilibrado) y la potencia media total transferida a la carga trifásica será:

$$P = U_1\, I_1 \cos \varphi_1 + U_2\, I_2 \cos \varphi_2 + U_3\, I_3 \cos \varphi_3 = \sum_{1}^{3} U_K\, I_K \cos \varphi_K$$

siendo:

U_K la tensión eficaz aplicada a la carga K.
I_K la intensidad eficaz de la corriente que recorre dicha carga K.
φ_K el ángulo de fase de la impedancia Z_K
$\cos \varphi_K$ factor de potencia de la carga K.

De igual forma la potencia reactiva que pone en juego la carga trifásica valdrá:

$$Q = \sum_{K=1}^{K=3} U_K\, I_K \ \text{sen}\ \varphi_K$$

y la potencia aparente: $\quad S = \sqrt{P^2 + Q^2}$

Para una carga monofásica: $\quad P = U\,I\ \cos\ \varphi \qquad Q = U\,I\ \text{sen}\ \varphi$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{U^2\,I^2\ \cos^2\ \varphi + U^2\,I^2\ \text{sen}^2\ \varphi} = U\,I$$

Para una carga trifásica "NO ES CIERTO" que:

$$S = \sum_{k=1}^{k=3} S_k = \sum_{k=1}^{k=3} U_K\, I_K \quad \text{(Suma aritmética)}$$

Es necesario sumar triángulos de potencias y la potencia aparente de una carga trifásica es la suma geométrica de $U_K I_K$ fácil de realizar si utilizamos el concepto de potencia compleja.

Supongamos que los fasores de las tensiones e intensidades aplicadas que recorren cada impedancia son las siguientes:

$$\bar{U}_1 = U_1 \angle\alpha \qquad \bar{I}_1 = I_1 \angle\alpha - \varphi_1$$

$$\bar{U}_2 = U_2 \angle\beta \qquad \bar{I}_2 = I_2 \angle\beta - \varphi_2$$

$$\bar{U}_3 = U_3 \angle\gamma \qquad \bar{I}_3 = I_3 \angle\gamma - \varphi_3$$

La potencia compleja de una fase, por ejemplo la fase 1, vendrá expresada por:

$$\bar{S}_1 = \bar{U}_1\, \bar{I}_1^{\,*} = U_1 \angle\varphi\ I_1 \angle -\alpha + \varphi_1 = U_1\, I_1 \angle\varphi_1$$

siendo $\bar{I}_1^{\,*}$ el Fasor conjugado de $\bar{I}_1$

La potencia compleja total valdrá: $\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3$ (Suma geométrica) sustituyendo valores tendremos:

$$\overline{S} = \sum_{1}^{3} \overline{U}_K \overline{I}_K^{*} = U_1 I_1 \underline{|\varphi_1} + U_2 I_2 \underline{|\varphi_2} + U_3 I_3 \underline{|\varphi_3} =$$

$$= U_1 I_1 \cos \varphi_1 + jU_1 I_1 \operatorname{sen} \varphi_1 +$$

$$+ U_2 I_2 \cos \varphi_2 + jU_2 I_2 \operatorname{sen} \varphi_2 +$$

$$+ U_3 I_3 \cos \varphi_3 + jU_3 I_3 \operatorname{sen} \varphi_3 =$$

sumando parte real e imaginaria independientemente tendremos que la potencia compleja valdrá:

$$\overline{S} = (P_1 + P_2 + P_3) + j\,(Q_1 + Q_2 + Q_3) = P + jQ = (\Sigma\, P) + j(\Sigma\, Q)$$

y su modulo será: $|\overline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$

9.1.1. Potencias en sistemas equilibrados en tensiones e intensidades.

Para que un sistema sea equilibrado en intensidades las tres impedancias que forman el sistema deben ser iguales, $\overline{Z}_1 = \overline{Z}_2 = \overline{Z}_3 = \overline{Z}$ por lo que $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$.

Las tensiones instantáneas aplicadas a cada carga (Z), $Z_1=Z_2=Z_3=Z$, son iguales y desfasadas 120º:

$$u_1(t) = \sqrt{2} U_F \cos \omega t$$

$$u_2(t) = \sqrt{2} U_F \cos (\omega t - 120^o)$$

$$u_3(t) = \sqrt{2} U_F \cos (\omega t - 240^o)$$

por lo que las intensidades instantáneas que recorren las respectivas impedancias, $Z_1=Z_2=Z_3=Z$, serán:

$$i_1(t) = \sqrt{2} I_F \cos (\omega t - \varphi)$$

$$i_2(t) = \sqrt{2} I_F \cos (\omega t - 120 - \varphi)$$

$$i_3(t) = \sqrt{2} I_F \cos (\omega t - 240 - \varphi)$$

y la potencia instantánea que pone en juego la carga valdrá:

$$p(t) = \sum_{1}^{3} u_K(t)\, i_K(t) = 2\, U_F\, I_F \left[\cos \omega t \cos (\omega t - \varphi) + \cos (\omega t - 120) \cos (\omega t - 120 - \varphi) + \right.$$

$$+ \cos(\omega t - 240) \cos(\omega t - 240 - \varphi)]$$

teniendo en cuenta la ecuación trigonométrica:

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

se tendrá que la potencia instantánea vale:

$$p(t) = 2 U_F I_F (\frac{1}{2} \cos(2\omega t - \varphi) + \frac{1}{2} \cos\varphi + \frac{1}{2} \cos(2\omega t - 240 - \varphi) + \frac{1}{2} \cos\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2} \cos(2\omega t - 480 - \varphi) + \frac{1}{2} \cos\varphi) =$$

$$= U_F I_F [3 \cos\varphi + \cos(2\omega t - \varphi) + \cos(2\omega t + 120 - \varphi) + \cos(2\omega t - 120 - \varphi)]$$

los tres últimos sumandos se anulan ya que corresponden a la suma de tres senoides desfasadas 120º, por lo que se tendrá:

$$\mathbf{p(t) = 3\, U_F\, I_F \cos\varphi}$$

observamos que LA POTENCIA INSTANTÁNEA EN UN SISTEMA TRIFÁSICO EQUILIBRADO ES IGUAL A TRES VECES LA POTENCIA MEDIA DE UNA DE SUS FASES.

La potencia instantánea como se ve no depende del tiempo, es un valor constante. Esta circunstancia constituye un extremo ventajoso respecto a la potencia instantánea que pone en juego una carga monofásica la cual no es constante, es pulsatoria con frecuencia 2ω y cuyo valor medio era: $P = U I \cos\varphi$.

En general, en un sistema polifásico equilibrado (n fases), la potencia instantánea valdrá:

$$p(t) = U_F I_F (\cos(2wt - \varphi) + \cos(2wt - \varphi - 2(\frac{2\pi}{n})) + ... +$$

$$+ \cos(2wt - \varphi - 2(n-1) \frac{2\pi}{n} + n \cos\varphi) = n\, U_F I_F \cos\varphi$$

La potencia media consumida por la carga trifásica equilibrada será:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t)\, dt = 3\, U_F I_F \cos\varphi = 3\, P_F$$

La potencia media e instantánea coinciden y su valor es 3 veces la potencia de una fase.

De forma análoga la potencia reactiva:

$$Q = 3\,Q_{Fase} = 3\,U_F\,I_F\,\text{sen}\,\varphi$$

y la potencia aparente

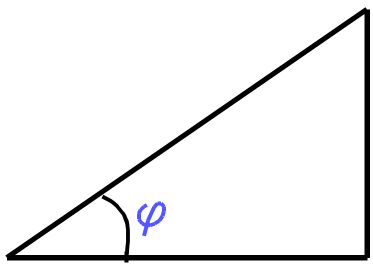
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

como los ángulos son iguales $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$ resulta que

$$S = 3\,U_F\,I_F = \sum_1^3 U_F\,I_F \quad \text{(en este caso suma aritmética = suma geométrica).}$$

Solo en este caso de cargas equilibradas coincide que la suma aritmética de las potencias aparentes coinciden con la suma geométrica

El triángulo de potencias, por ejemplo de una carga inductiva, seria:

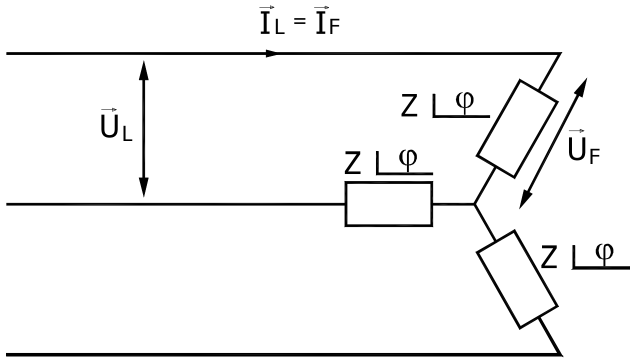


$$Q = 3U_FI_F\,\text{sen}\,\varphi = 3\frac{U_F}{I_F}I_F^2\,\text{sen}\,\varphi$$
$$= 3\,Z\,\text{sen}\,\varphi\,I_F^2 = 3\,X\,I_F^2$$

$$P = 3U_FI_F\cos\varphi = 3\frac{U_F}{I_F}\cos\varphi I_F^2 = 3Z\cos\varphi I_F^2 = 3\,R\,I_F^2$$

En ocasiones, no son accesibles las fases por lo que es necesario medir la potencia utilizando magnitudes de línea. En este supuesto y en sistemas equilibrados se tiene:

9.1.1.1. Cargas en estrella.



La tensión e intensidad de fase en función de las de línea valdrán:

$$U_L = \sqrt{3}U_F \quad \longrightarrow \quad U_F = \frac{U_L}{\sqrt{3}}$$

$$I_F = I_L$$

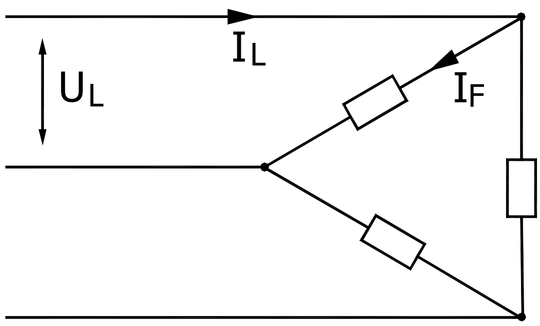
La potencia ACTIVA, REACTIVA y APARENTE en función de las magnitudes de línea resultan ser:

$$P = 3\ U_F\ I_F \cos\ \varphi = 3\ \frac{U_L}{\sqrt{3}}\ I_L\ \cos\ \varphi = \sqrt{3}\ U_L\ I_L\ \cos\ \varphi$$

$$Q = 3\ U_F\ I_F\ \mathrm{sen}\ \varphi = \sqrt{3}\ U_L\ I_L\ \mathrm{sen}\ \varphi$$

$$S = 3\ U_F\ I_F = \sqrt{3}\ U_L\ I_L$$

9.1.1.2. Cargas en triángulo.



La tensión e intensidad de fase en función de las de línea valdrán:

$$U_L = U_F$$

$$I_L = \sqrt{3}I_F \quad \text{--->} \quad I_F = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$$

La potencia ACTIVA, REACTIVA y APARENTE en función de las magnitudes de línea resultan ser:

$$P = 3\ U_F\ I_F \cos\ \varphi = 3\ U_L\ \frac{I_L}{\sqrt{3}}\ \cos\ \varphi = \sqrt{3}\ U_L\ I_L\ \cos\ \varphi$$

$$Q = 3\ U_F\ I_F\ \mathrm{sen}\ \varphi = \sqrt{3}\ U_L\ I_L\ \mathrm{sen}\ \varphi$$

$$S = 3\ U_F\ I_F = \sqrt{3}\ U_L\ I_L$$

Se observa que, independientemente de que la carga este en estrella o en triángulo, las potencias activa, reactiva y aparente de una carga trifásica equilibrada en función de las magnitudes de línea serán:

$$\mathbf{P = \sqrt{3}\, U_L\, I_L \cos \varphi}$$

$$\mathbf{Q = \sqrt{3}\, U_L\, I_L \,\mathrm{sen}\, \varphi}$$

$$\mathbf{S = \sqrt{3}\, U_L\, I_L}$$

9.2. CORRECCIÓN DEL FACTOR DE POTENCIA

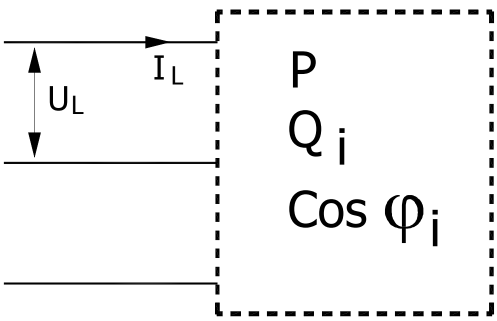
Solo se va a considerar la corrección del factor de potencia en sistemas equilibrados.

Mejora del factor de potencia en las instalaciones eléctricas equilibradas.

Para mejorar el factor de potencia de un receptor trifásico equilibrado inductivo (99% de los receptores industriales) hay que colocar en paralelo al receptor una batería de condensadores conectados en estrella o en triángulo.

Si el receptor consume una potencia activa P con un cos φ_i, de una línea trifásica de tensión aparente U_L, la potencia reactiva que suministra la línea al receptor será:

$$Q_i = P \,\mathrm{tg}\, (\varphi_i)$$

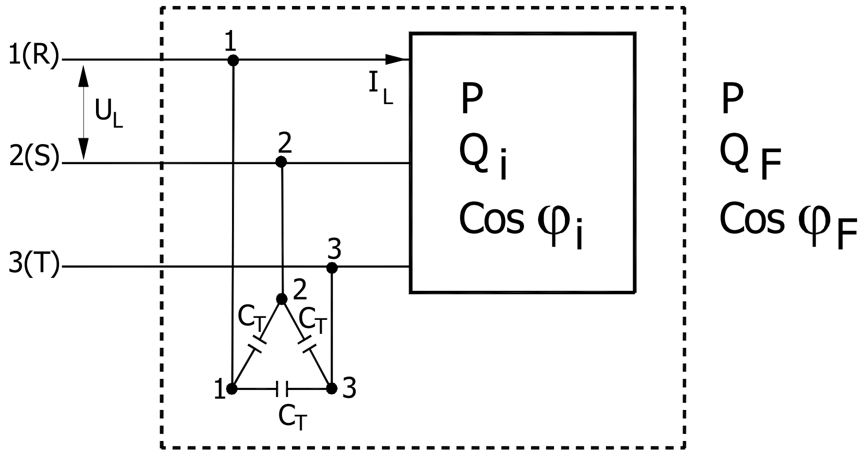


Si lo que se desea es disminuir esta potencia reactiva hasta un valor Q_F y por lo tanto, hasta un nuevo factor de potencia, cos (φ_F), se tendrá que poner una batería de condensadores, con una capacidad tal que nos suministre una potencia reactiva,

$$Q_c = Q_i - Q_F = P \,\mathrm{tg}\, (\varphi_i) - P \,\mathrm{tg}\, (\varphi_F) = P\, (\mathrm{tg}(\varphi_i) - \mathrm{tg}(\varphi_F))$$

Conociendo la potencia reactiva que suministran los condensadores podemos calcular la capacidad de éstos.

Condensadores conectados en triángulo:



Esquema de la conexión de un triángulo de condensadores en paralelo con un receptor trifásico equilibrado

La potencia reactiva "suministrada" por cada condensador es

$$Q_C' = I_C^2\, X_C = \left(\frac{U_F}{1/(\omega C_T)}\right)^2 \frac{1}{\omega\, C_T} = U_L^2\, C_T^2\, \omega^2 \,\frac{1}{C_T\, \omega} = U_L^2\, C_T\, \omega$$

y la potencia reactiva suministrada por los tres en triángulo sera: $Q_C = 3\, Q_C' = 3\, U_L^2\, C_T\, \omega$

como la potencia a compensar es $Q = P\,(\mathrm{tg}(\varphi_i) - \mathrm{tg}(\varphi_F))$, se tendrá:

$$P\,(\mathrm{tg}(\varphi_i) - \mathrm{tg}(\varphi_F)) = 3\, U_L^2\, C_T\, \omega$$

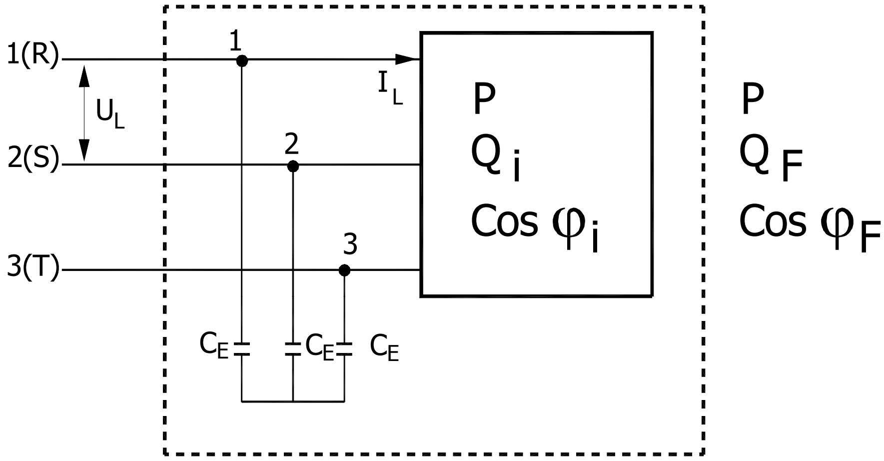
de aquí $$C_T = \frac{P\,(\mathrm{tg}(\varphi_i) - \mathrm{tg}(\varphi_F))}{3\, U_L^2\, \omega} \text{ faradios} \qquad (1)$$

Condensadores conectados en estrella:

La potencia reactiva "suministrada" por los tres condensadores es

$$Q_C = 3\, Q_C' = 3\, I_C^2\, X_C = 3\left(\frac{U_L/\sqrt{3}}{1/(C_E\, \omega)}\right)^2 \frac{1}{C_E\, \omega} = \frac{3\, U_L^2\, \omega\, C_E}{3} = U_L^2\, \omega\, C_E$$

por consiguiente la capacidad de cada condensador será:



Esquema de la conexión de una estrella de condensadores en paralelo con un receptor trifásico equilibrado inductivo

$$C_E = \frac{Q_C}{U_L^2\,\omega} = \frac{P\,(tg(\varphi_i) - tg(\varphi_F))}{U_L^2\,\omega} \quad \text{faradios} \qquad (2)$$

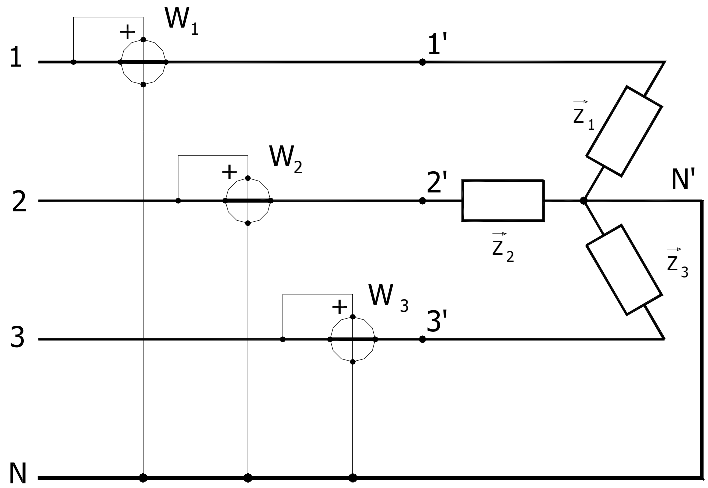
Comparado (1) y (2) se tiene que $C_T = C_E/3$.

La capacidad "individual" de cada condensador conectado en triángulo es la tercera parte de la del condensador que conectamos en estrella, ya que corrige el factor de potencia en un mismo valor, para una potencia activa, frecuencia, cos φ_i de partida y tensiones dadas. Por el contrario, la tensión que debe soportar el condensador conectado en estrella es solamente $\frac{1}{\sqrt{3}}$ de la tensión en bornes del condensador conectado en triángulo.

9.3. MEDIDA DE LA POTENCIA ACTIVA EN SISTEMAS TRIFÁSICOS

9.3.1. Carga en estrella con neutro accesible

Si tenemos un receptor trifásico, compuesto por tres impedancias conectadas en estrella y con neutro, la potencia absorbida por las tres impedancias $\overline{Z}_1$, $\overline{Z}_2$ y $\overline{Z}_3$ se puede medir mediante tres vatímetros conectados según la figura siguiente:



Las lecturas de los vatímetros serán:

$$W_1 = U_{1'N'}\, I_1 \cos(U_{1'N'},I_1) = U_F\, I_1 \cos \varphi_1$$

$$W_2 = U_{2'N'}\, I_2 \cos(U_{2'N'},I_2) = U_F\, I_2 \cos \varphi_2$$

$$W_3 = U_{3'N'}\, I_3 \cos(U_{3'N'}\, I_3) = U_F\, I_3 \cos \varphi_3$$

que coinciden con las potencias activas consumidas por cada impedancia respectivamente

$$W_1 = P_{Z1}\ , \quad W_2 = P_{Z2}\ , \quad W_3 = P_{Z3}$$

por lo que la potencia activa total consumida por este receptor, que es la suma de las potencias activas consumidas por cada impedancia, coincide con la suma de las lecturas de los vatímetros conectados según la figura anterior.

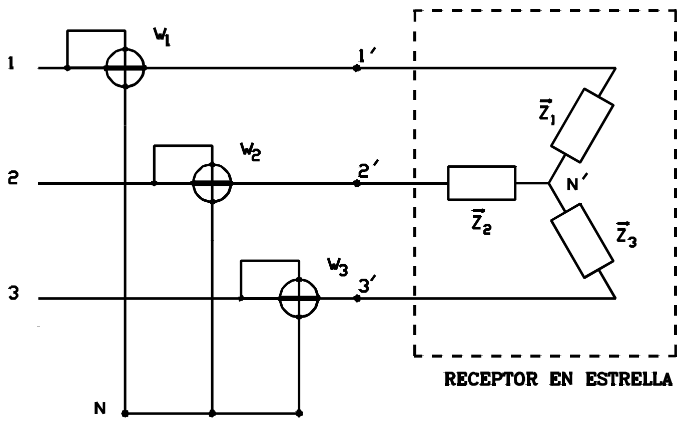
$$P = P_{Z1} + P_{Z2} + P_{Z3} = W_1 + W_2 + W_3$$

Si las tres impedancias son iguales $\overline{Z}_1 = \overline{Z}_2 = \overline{Z}_3$ tendremos un sistema equilibrado en intensidades y tensiones, por lo que $I_1 = I_2 = I_3$ y $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$, por consiguiente solo se necesita **un vatímetro, W** , para medir la potencia activa total, que será:

$$\mathbf{P = 3\,W}$$

9.3.2. Carga en estrella con neutro NO accesible.

El caso de este receptor que solo dispone de tres conductores (tres fases), la medida de la potencia activa total consumida por el receptor se puede obtener mediante tres vatímetros montados según el esquema de la figura, donde vemos que se ha formado un neutro artificial con las bobinas voltimétricas de los vatímetros.



La potencia media consumida por el receptor trifásico es el valor medio de la potencia instantánea transferida al receptor. Esta potencia instantánea vale:

$$p_r(t) = u_{1'N'}\, i_1 + u_{2'N'}\, i_2 + u_{3'N'}\, i_3$$

La lectura de un vatímetro es el valor medio del producto de la onda tensión aplicada en su bobina voltimétrica por la onda de intensidad aplicada en su bobina amperimétrica.

La suma de las lecturas de los vatímetros, $P = W_1 + W_2 + W_3$, es la media de la potencia instantánea:

$$p_W(t) = u_{1N}\, i_1 + u_{2N}\, i_2 + u_{3N}\, i_3$$

considerando que $u_{11'} = u_{22'} = u_{33'} = 0$ y recordando las siguientes expresiones:

$u_{1N} = u_{1'N'} + u_{N'N}$
$u_{2N} = u_{2'N'} + u_{N'N}$
$u_{3N} = u_{3'N'} + u_{N'N}$

se tendrá que:

$$p_W(t) = (u_{1'N'} + u_{N'N})\, i_1 + (u_{2N} + u_{N'N})\, i_2 + (u_{3'N} + u_{N'N})\, i_3 =$$

$$= u_{1'N'}\, i_1 + u_{2'N'}\, i_2 + u_{3'N}\, i_3 + u_{N'N}\, (i_1 + i_2 + i_3\,)$$

Por ser un sistema trifásico a tres hilos, $i_1 + i_2 + i_3 = 0$, y por consiguiente la potencia instantánea que pone en juego el receptor es igual a la potencia instantánea medida por los tres vatímetros.

$$p_r(t) = p_W(t)$$

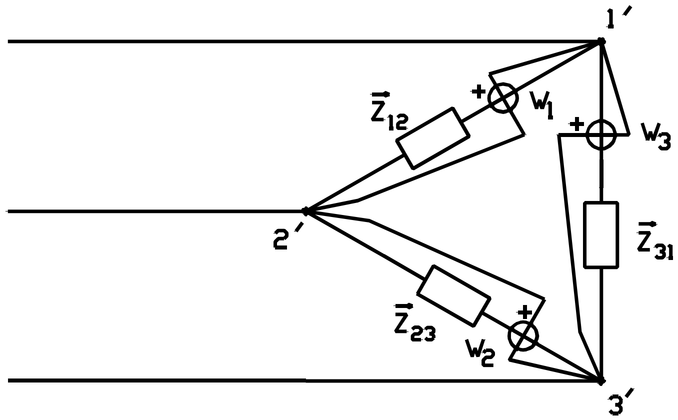
Si las potencias instantáneas coinciden, el valor medio de éstas también, y así tendremos que la potencia media consumida por el receptor se puede obtener a partir de la suma de las lecturas de los tres vatímetros.

$$\mathbf{P = W_1 + W_2 + W_3}$$

Este sistema de medida se puede simplificar, como veremos más adelante, utilizando sólo dos vatímetros.

9.3.3. Carga en triángulo con fases accesibles.

Para un sistema de cargas $\overline{Z}_{12}$, $\overline{Z}_{23}$ y $\overline{Z}_{31}$ conectadas en triángulo con fases accesibles, un sistema de medida de potencia activa total, puede verse en la figura.



La potencia activa total consumida por la carga trifásica en triángulo, será la suma de las potencias de cada uno de los tres sistemas monofásicos que lo forman:

$$P = P_{Z12} + P_{Z23} + P_{Z31}$$

donde P_{Z12} +P_{Z23} y P_{Z31} son las potencias activas consumidas por las impedancias $\overline{Z}_{12}$, $\overline{Z}_{23}$ y $\overline{Z}_{31}$ respectivamente.

La lectura del vatímetro W_1 coincide con la potencia media o activa consumida por la impedancia Z_{12}

$$W_1 = U_{1'2'}\, I_{1'2'} \operatorname{Cos}(U_{1'2'}, I_{1'2'}) = P_{Z12}$$

de igual manera la lectura de los vatímetros W_2 y W_3 son:

$$W_2 = U_{2'3'}\, I_{2'3'} \operatorname{Cos}(U_{2'3'}, I_{2'3'}) = P_{Z23}$$

$$W_3 = U_{3'1'}\, I_{3'1'} \operatorname{Cos}(U_{3'1'}, I_{3'1'}) = P_{Z31}$$

Esto implica que la suma de las lecturas de los tres vatímetros nos da la potencia activa total consumida por el receptor en triángulo.

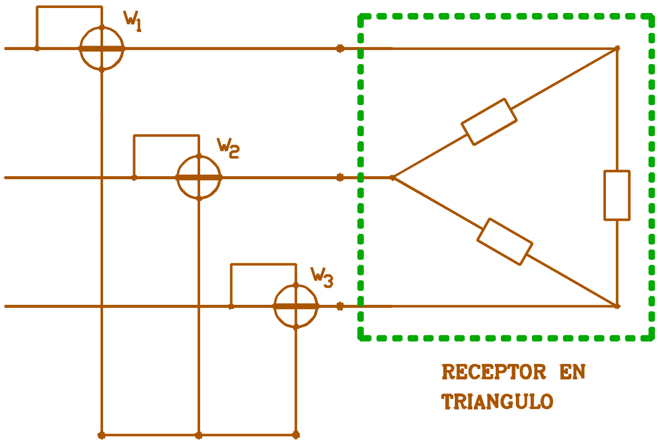
$$\mathbf{P = W_1 + W_2 + W_3}$$

Si las tres impedancias fueran iguales, $\overline{Z}_{12} = \overline{Z}_{23} = \overline{Z}_{31}$ la lectura de los tres vatímetros también sería la misma, $W_1 = W_2 = W_3$, por lo que con un solo vatímetro, W, sería suficiente para medir la potencia activa, siendo:

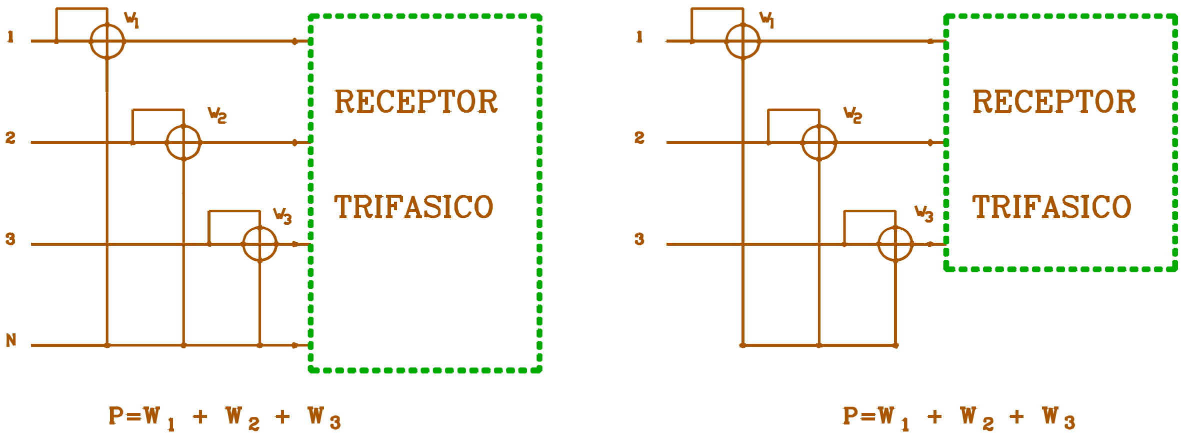
$$\mathbf{P = 3\ W}.$$

9.3.4. Carga en triángulo con fases NO accesibles.

Se resuelve con neutro artificial igual que en las cargas trifásicas en estrella a tres hilos (debido a que una carga en triángulo equivale a una carga en estrella).



Como resumen de lo visto hasta ahora, en un sistema trifásico, para obtener la medida de la potencia activa, distinguiremos entre receptores o sistemas que disponen de tres conductores (tres fases) y aquellos que disponen de cuatro conductores (tres fases más neutro).



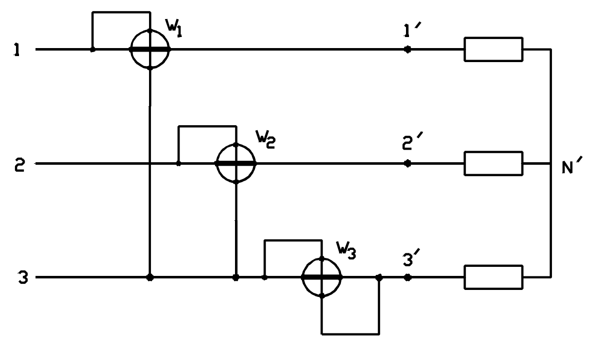
Medida de potencia en sistemas trifásicos con tres o cuatro conductores.

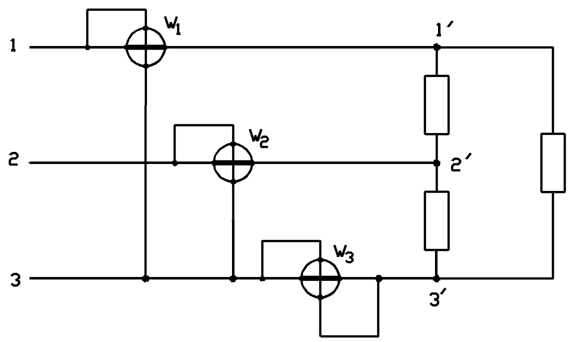
9.3.5. Medida de la potencia con dos Vatímetros.

Cuando la red tiene solamente tres conductores y la carga está conectada en estrella o triángulo, equilibrada o no, se puede efectuar la medida de la potencia trifásica utilizando solamente dos vatímetros, este método de medida se denomina **método de Aron** o **principio de los dos vatímetros**.

Como se ha visto anteriormente, para medir la potencia consumida por un receptor trifásico en estrella o triángulo, se pueden utilizar tres vatímetros con neutro artificial.

Si tomamos el punto N (neutro artificial) sobre una de las fases, (la 3ª por ejemplo) es claro que el vatímetro "3" no marcaría, ya que $U_{3N} = 0$, y la suma de las lecturas de los vatímetros sería la media de la potencia instantánea: $p_W = u_{13}\, i_1 + u_{23}\, i_2$





Vamos a ver que esta potencia instantánea coincide con la potencia absorbida por la carga.

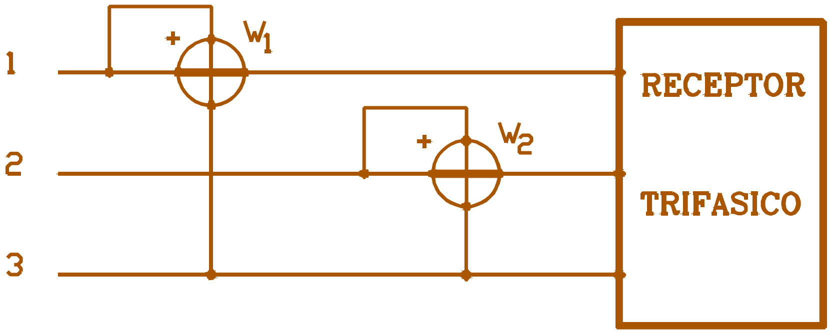
Sabemos que $i_3 = - i_1 - i_2$, valor que sustituido en la expresión de la potencia instantánea puesta en juego por el receptor nos dará:

$$p_r(t) = u_{1'N'}i_1 + u_{2'N'}i_2 + u_{3'N'}i_3 = u_{1'N'}i_1 + u_{2'N'}i_2 + u_{3'N'}(-i_1-i_2) =$$

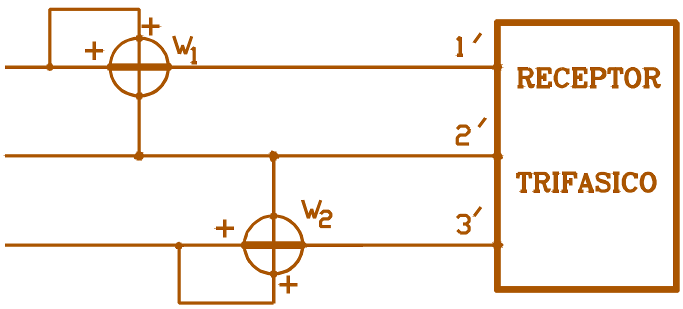
$$= (u_{1'N'} - u_{3'N})\, i_1 + (u_{2'N'} - u_{3'N})\, i_2 = u_{1'3'}\, i_1 + u_{2'3'}\, i_2$$

Si consideramos que $u_{11'} = u_{22'} = u_{33'} = 0$ entonces $P_w = P_r(t)$, lo que demuestra que se puede medir la potencia instantánea total de un sistema trifásico a 3 hilos (equilibrado o no) por medio de dos vatímetros (conexión ARON).

Para ello, se dispondrá de dos aparatos de medida de tal manera que las bobinas amperimétricas están en serie con dos fases cualesquiera (1 y 2 por ejemplo) y que sus bobinas voltimétricas esten en paralelo entre la fase respectiva y la fase que no lleva vatímetro (la 3 en el caso de la figura).

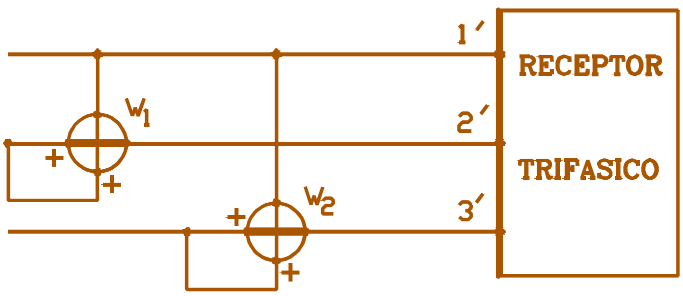


Los otros dos montajes posibles son (ya que el neutro puede ser cualquier fase y la demostración sería igual):



Considerando el neutro de la estrella en la fase 2.

Cambio: $i_2 = - i_1 - i_3$.

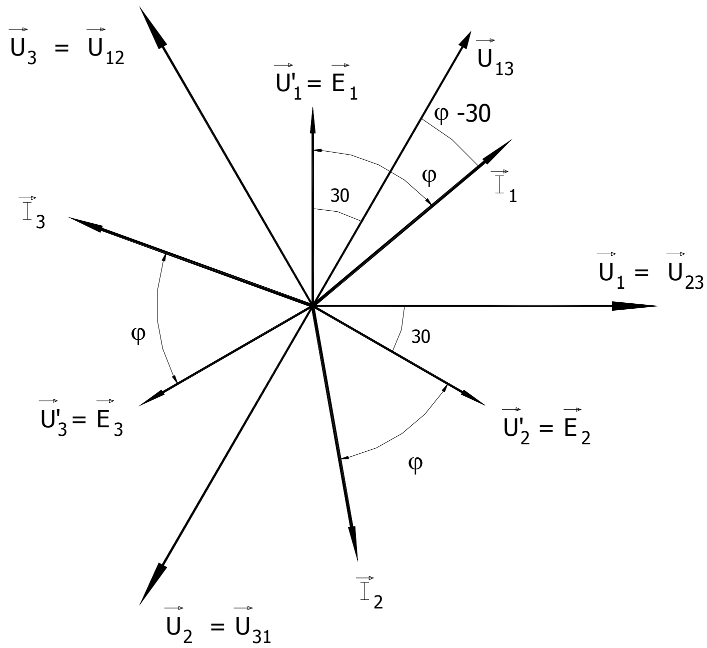


Considerando el neutro de la estrella en la fase 3.

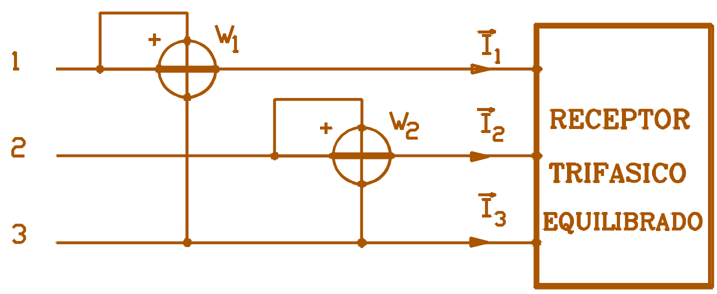
Cambio: $i_1 = - i_2 - i_3$.

9.3.5.1. Principio de los dos Vatímetros aplicado a un sistema equilibrado.

En un receptor trifásico equilibrado, las intensidades de línea tienen igual valor eficaz y están desfasados 120º entre sí. Para una carga inductiva se tendría el diagrama vectorial de tensiones o intensidades de la figura siguiente.



Si colocamos dos vatímetros W_1 y W_2 en conexión ARON a este receptor (ver figura) las lecturas de los vatímetros serán:



$W_1 = U_{13}\, I_1 \text{ Cos } (U_{13}, I_1)$

$W_2 = U_{23}\, I_2 \text{ Cos } (U_{23}, I_2)$

Según vemos en el diagrama vectorial, el ángulo entre $\bar{U}_{13}$ e $\bar{I}_1$ vale $\varphi - 30$, y el ángulo entre $\bar{U}_{23}$ e $\bar{I}_2$ vale $\varphi + 30$ por lo que:

$W_1 = U_L\, I_L \text{ Cos } (\varphi - 30)$

$W_2 = U_L\, I_L \text{ Cos } (\varphi + 30)$

por tanto, la potencia activa total consumida por el receptor valdrá:

$$P = W_1 + W_2 = U_L\, I_L\, (\cos(\varphi - 30) + \cos(\varphi + 30))$$

y debe ser igual a $P = \sqrt{3}\, U_L\, I_L \cos(\varphi)$

Por otra parte, se tendrá también que

$$W_1 - W_2 = U_L\, I_L\, (\cos(\varphi - 30) - \cos(\varphi + 30)) =$$

$$= U_L\, I_L \operatorname{sen} \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

luego, **la potencia reactiva de una carga trifásica equilibrada se puede obtener a partir de las lecturas de los dos vatímetros en conexión ARON mediante la diferencia de las lecturas multiplicada por el factor $\sqrt{3}$, o sea:**

$$Q = \sqrt{3}\,(W_1 - W_2)$$

Se puede también obtener el factor de potencia de la carga a partir de

$$\mathrm{Tg}\,\varphi = \frac{Q}{P} = \frac{\sqrt{3}\,(W_1 - W_2)}{W_1 + W_2}$$

En consecuencia, con el método de los dos vatímetros o de ARON, en un sistema trifásico <u>equilibrado</u>:

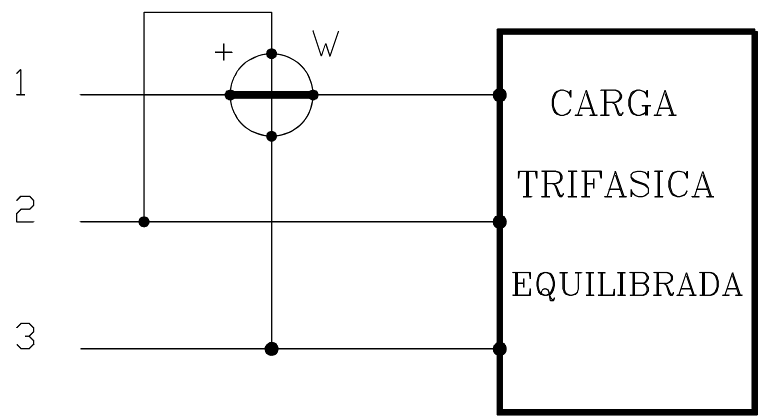
- La suma de las lecturas de los vatímetros nos proporciona la potencia activa del sistema.
- La diferencia de las lecturas, a falta del factor $\sqrt{3}$, nos da la potencia reactiva.
- El cociente entre la diferencia y la suma de las lecturas multiplicada por $\sqrt{3}$ proporciona la tangente del ángulo.

9.4. MEDIDA DE LA POTENCIA REACTIVA EN SISTEMAS TRIFÁSICOS

Los mismos esquemas utilizados para medir la potencia activa se pueden utilizar para medir la potencia reactiva, con la salvedad de utilizar varímetros en lugar de vatímetros. Pero, lo más frecuente, es utilizar vatímetros para la medida de la potencia reactiva, siendo algunos casos posibles de conexión estudiados en los apartados siguientes.

9.4.1. Sistemas equilibrados

Ya se ha visto que por el procedimiento de los dos vatímetros, la potencia consumida por un receptor es: $Q = \sqrt{3}\,(W_1 - W_2)$, siendo válida esta expresión solo para sistemas equilibrados. También, en estos casos de sistemas equilibrados puede utilizarse un simple vatímetro conectado según se representa en la figura.



Siendo la lectura del vatímetro $1 / \sqrt{3}$ de la potencia reactiva del conjunto:

$$W = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

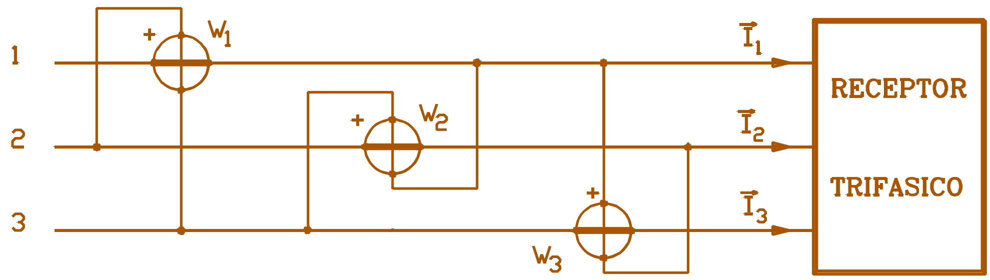
En efecto, para un sistema en estrella o en triángulo, la intensidad de línea I_1 está desfasada φ respecto a la tensión simple U_1', por lo que la lectura del vatímetro será:

$$W = U_{23}\, I_1 \, \text{Cos}\,(U_{23}\,,\, I_1) = U_L\, I_L \;\; \text{Cos}\,(90 - \varphi) = \; U_L\, I_L \, \text{Sen}\, \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

9.4.2. Sistemas trifásicos sin hilo neutro equilibrados en generación y desequilibrados en cargas.

El método de medida más común es el representado en la figura, siendo la potencia reactiva:

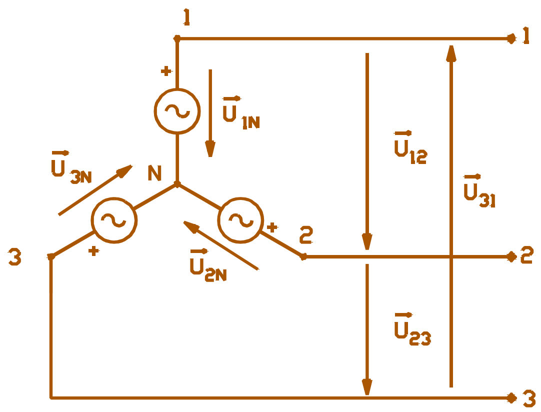
$$Q = \frac{(W_1 + W_2 + W_3)}{\sqrt{3}}$$

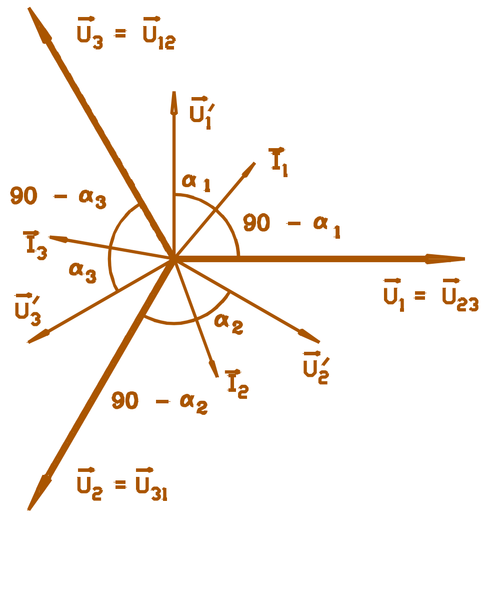


Sabemos que la potencia reactiva consumida por el receptor trifásico es la suma de las potencias reactivas suministrada por los generadores, por lo que si suponemos que las tensiones de línea son producidas por tres fuentes de tensión ideales en estrella, se tendrá que la potencia reactiva suministrada por el generador será:

$$Q = U_{1N}\, I_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + U_{2N}\, I_2 \operatorname{sen} \alpha_2 + U_{3N}\, I_3 \operatorname{sen} \alpha_3 =$$
$$= U_F\, I_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + U_F\, I_2 \operatorname{sen} \alpha_2 + U_F\, I_3 \operatorname{sen} \alpha_3$$

siendo α_i el desfase entre las tensiones simples de generación U_{iN} y las intensidades de línea.





La suma de las lecturas de los Vatímetros tendrá por valor:

$$W_1 + W_2 + W_3 = U_{23}\, I_1 \cos(U_{23},I_1) + U_{31}\, I_2 \cos(U_{31},I_2) + V_{12}\, I_3 \cos(V_{12},I_2) =$$

$$= \sqrt{3}\, U_{1N}\, I_1 \cos(90 - \alpha_1) + \sqrt{3}\, U_{2N}\, I_2 \cos(90 - \alpha_2) + \sqrt{3}\, U_{3N}\, I_3 \cos(90 - \alpha_3) =$$

$$= \sqrt{3}\, (U_F\, I_1 \text{ sen } \alpha_1 + U_F\, I_2 \text{ sen } \alpha_2 + U_F\, I_3 \text{ sen } \alpha_3) = \sqrt{3}\, Q$$

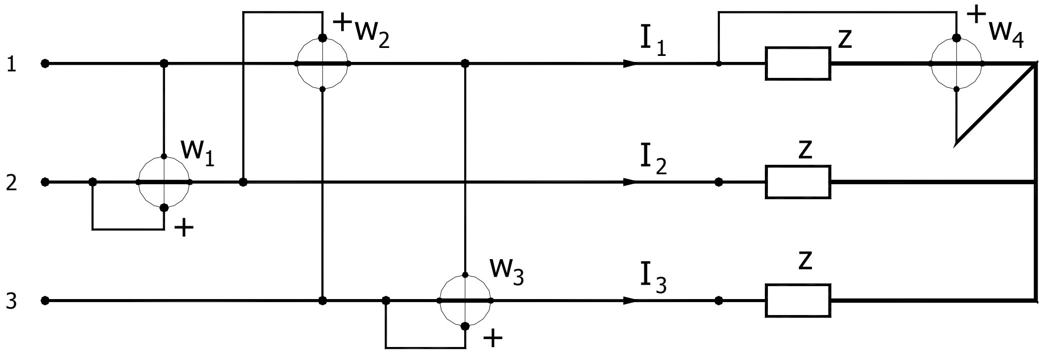
por lo que:

$$Q = \frac{W_1 + W_2 + W_3}{\sqrt{3}}$$

Es decir, la potencia reactiva puesta en juego por un receptor trifásico desequilibrado o equilibrado, pero alimentado por tensiones equilibradas a tres hilos, es $1/\sqrt{3}$ veces la suma de las lecturas de los tres vatímetros conectados según la figura.

Problema:

Determinar las indicaciones de cada uno de los vatímetros de la figura, sabiendo que la carga equilibrada consume 24 KW, con un factor de potencia de 0'8 (inductivo) y las tensiones de línea son equilibradas de secuencia directa y de valor 220 V.



Solución:

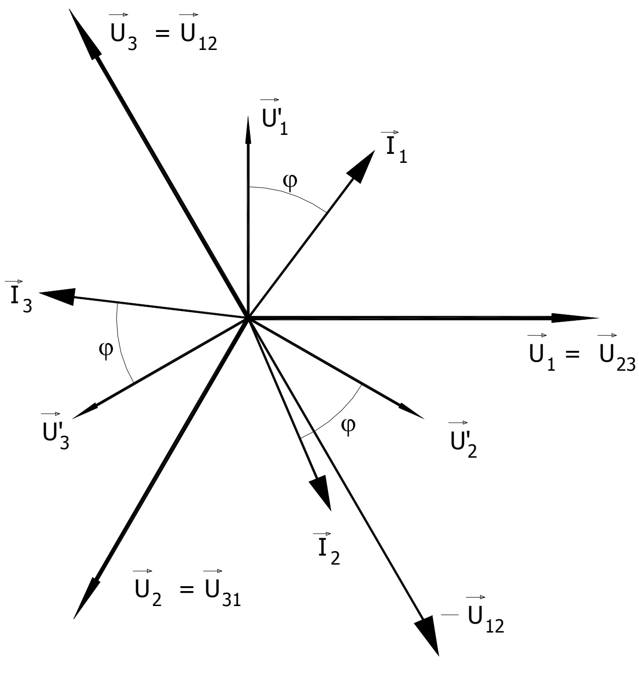
$$P = 24000 = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi \qquad \text{de aquí: } I_L = \frac{24000}{\sqrt{3} \times 220 \times 0{,}8} = 78{,}73 \text{ A.}$$

Las intensidades de línea serán:

$$\overline{I}_1 = 78{,}73 \underline{|\ 90 - 36{,}87} = 78{,}73 \underline{|\ 53{,}13^o}$$

$$\overline{I}_2 = 78{,}73 \underline{|\ -30 - 36{,}87} = 78{,}73 \underline{|\ -66{,}87^o}$$

$$\overline{I}_3 = 78{,}73 \underline{|\ -150 - 36{,}87} = 78{,}73 \underline{|\ -186{,}87^o}$$



Las lecturas de los vatímetros valdrán:

$$W_1 = U_{21}\, I_2 \cos(U_{21},I_2) = 220 \times 78{,}73 \cos(-60 + 66{,}87) = 17196 \text{ W.}$$

$$W_2 = U_{23}\, I_1 \cos(U_{23},I_1) = 220 \times 78{,}73 \cos(0 - 53{,}13) = 10392{,}3 \text{ W.}$$

$$W_3 = U_{31}\, I_3 \cos(U_{31},I_3) = 220 \times 78{,}73 \cos(-120 + 186{,}87) = 6804 \text{ W.}$$

$$W_4 = \frac{U_L}{\sqrt{3}}\, I_3 \cos(U_1^{/},I_1) = \frac{220}{\sqrt{3}} \times 78{,}73 \cos(90 - 53{,}13) = 8000 \text{ W.}$$

Comprobación:

$P_T = 24$ KW $\qquad$ $Q = P \operatorname{tg} \varphi = 18$ KVAr

Cada una de las impedancias consume: $P_Z = \frac{24}{3} = 8$ kW por lo que : $W_4 = 8000$ W

W_2 mide potencia reactiva: $W_2 = \frac{Q}{\sqrt{3}} = \frac{18000}{\sqrt{3}} = 10392{,}3$ W

El vatímetro 1 y 3 están en conexión aron por lo que:

$$W_1 + W_3 = P = 24000$$

$$\sqrt{3}\,(W_1 - W_3) = Q = 18000$$

de este sistema de ecuaciones obtenemos:

$W_1 = 17196$ W $\qquad$ $W_2 = 6804$ W