Física Cuántica. Primer parcial. 6/2/2009.

Nombre: ______________________ Apellidos: ____

1.- Para un sistema que se puede describir mediante un espacio de estados de dimensión 2, los operadores A y $\hat{H}$, siendo este último el hamiltoniano, están representados por las siguientes matrices:

$$A \equiv \begin{pmatrix} \alpha & -i\alpha \\ i\alpha & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \hat{H} \equiv \begin{pmatrix} \hbar\omega & 0 \\ 0 & 2\hbar\omega \end{pmatrix}.$$

¿Son hermíticos los operadores anteriores? ¿Son observables? Si notamos los autovalores de A de la forma a_1 y a_2 y los de $\hat{H}$, E_1 y E_2, obtener estos valores, así como los autovectores de A y de $\hat{H}$.

En el instante $t = 0$ el sistema parte del estado $|\psi(0)\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$. En el instante $t = 0^+$ medimos el valor de A, de modo que podemos obtener cualquiera de los dos valores a_1 y a_2. A continuación medimos $\hat{H}$ en el instante t, de modo que podemos obtener los valores E_1 y E_2. Calcular las distintas probabilidades de obtener un valor a_i en la primera medida y un valor E_j en la segunda: $\mathcal{P}_{A,H}(a_i, E_j)$. ¿Dependen del tiempo t estas probabilidades? ¿Por qué?

Y si midiéramos al contrario ¿Se obtienen las mismas probabilidades? ¿Dependerán las probabilidades $\mathcal{P}_{H,A}(E_j, a_i)$ del tiempo? ¿Por qué?

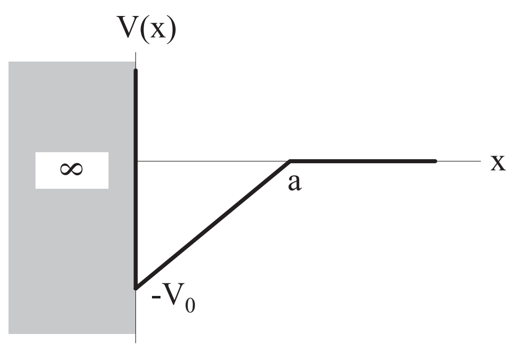
2.- La regla de cuantización de la primitiva teoría cuántica establece que para una partícula que realiza un movimiento periódico en una sola dimensión se verifica que:

$$\oint p(x)\, dx = nh,$$

siendo n un número entero.

Aplicar esta regla de cuantización para obtener la energía del estado fundamental de una partícula que se mueve en el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{para } x < 0 \\ -V_0\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) & \text{para } 0 < x < a \\ 0 & \text{para } x > a \end{cases}.$$



Comprobar que el resultado obtenido tiene las dimensiones de una energía.

¿Cómo se puede interpretar físicamente la regla de cuantización anterior?

3.- Una partícula está descrita mediante la siguiente función de onda...

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \le -a \\ \sin^2\left(\pi\dfrac{x}{a}\right) & \text{para } -a \le x \le a \\ 0 & \text{para } x \ge a \end{cases}$$

Normalizar la función de onda. Calcular el valor medio de la posición y la dispersión. ¿Podrías estimar el valor medio del momento y su dispersión?

4.- La evolución temporal de una partícula viene determinada por el siguiente operador hamiltoniano:

$$\hat{H} = \alpha\hat{x} + \beta\hat{p}$$

Aplicar el teorema de Ehrenfest para obtener las ecuaciones que nos dan la evolución temporal de los valores medios de la posición y del momento, así como de las correspondientes dispersiones, si en $t = 0$ partimos de las siguientes condiciones iniciales:

$$\langle x\rangle(0) = x_0, \qquad \langle p\rangle(0) = p_0, \qquad \Delta x(0) = \delta_x, \qquad \Delta p(0) = \delta_p$$

¿Como podemos definir la densidad de corriente de probabilidad para esta partícula?

1.- Para un sistema que se puede describir mediante un espacio de estados de dimensión 2, los operadores A y $\hat{H}$, siendo este último el hamiltoniano, están representados por las siguientes matrices:

$$A \equiv \begin{pmatrix} \alpha & -i\alpha \\ i\alpha & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \hat{H} \equiv \begin{pmatrix} \hbar\omega & 0 \\ 0 & 2\hbar\omega \end{pmatrix}.$$

¿Son hermíticos los operadores anteriores? ¿Son observables? Si notamos los autovalores de A de la forma a_1 y a_2 y los de $\hat{H}$, E_1 y E_2, obtener estos valores, así como los autovectores de A y de $\hat{H}$.

En el instante $t = 0$ el sistema parte del estado $|\psi(0)\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$. En el instante $t = 0^+$ medimos el valor de A, de modo que podemos obtener cualquiera de los dos valores a_1 y a_2. A continuación medimos $\hat{H}$ en el instante t, de modo que podemos obtener los valores E_1 y E_2. Calcular las distintas probabilidades de obtener un valor a_i en la primera medida y un valor E_j en la segunda: $\mathcal{P}_{A,H}(a_i, E_j)$. ¿Dependen del tiempo t estas probabilidades? ¿Por qué?

Y si midiéramos al contrario ¿Se obtienen las mismas probabilidades? ¿Dependerán las probabilidades $\mathcal{P}_{H,A}(E_j, a_i)$ del tiempo? ¿Por qué?

Solución.- El hamiltoniano es hermítico puesto que es diagonal con autovalores reales. La matriz A también se ve que es hermítica:

$$A^\dagger = \left(A^t\right)^* \equiv \begin{pmatrix} \alpha & i\alpha \\ -i\alpha & \alpha \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \alpha & -i\alpha \\ i\alpha & \alpha \end{pmatrix} \equiv A$$

También son observables ya que cualquier operador hermítico que actúa sobre un espacio de estados de dimensión finita es automáticamente un observable. Vamos a calcular los autovalores de A y de $\hat{H}$. Comenzamos por A. Su ecuación caracterísica es:

$$|A - \lambda I| = 0 = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & -i\alpha \\ i\alpha & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = \alpha^2 + \lambda^2 - 2\alpha\lambda - \alpha^2 = \lambda(\lambda - 2\alpha) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \begin{cases} 0 = a_1 \\ 2\alpha = a_2 \end{cases}$$

Calculamos ahora los autovectores correspondientes. Comenzamos por el autovalor 0:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -i\alpha \\ i\alpha & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left.\begin{array}{r} \alpha x - i\alpha y = 0 \\ i\alpha x + \alpha y = 0 \end{array}\right\}$$

Estas dos ecuaciones son iguales y equivalentes a la condición $x = iy$. Un vector normalizado que satisface esta condición es:

$$|0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el otro autovector, correspondiente al autovalor 2α:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -i\alpha \\ i\alpha & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \left.\begin{array}{r} \alpha x - i\alpha y = 2\alpha x \\ i\alpha x + \alpha y = 2\alpha y \end{array}\right\}$$

Estas dos ecuaciones son de nuevo iguales entre si y equivalentes a la condición $ix = y$, de modo que un vector normalizado que cumple esta condición es:

$$|2\alpha\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Por otro lado, el hamiltoniano está diagonalizado, de modo que sus autovalores y autovectores son:

$$E_1 = \hbar\omega \to |E_1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = 2\hbar\omega \to |E_2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resumiendo, los autovalores y autovectores de A y $\hat{H}$ son:

Operador	Autovalores	Autovectores
A	$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 2\alpha \end{cases}$	$|0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $|2\alpha\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$
$\hat{H}$	$\begin{cases} E_1 = \hbar\omega \\ E_2 = 2\hbar\omega \end{cases}$	$|E_1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|E_2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

El estado en $t=0$ es, ya normalizado:

$$|\psi(0)\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$$

Si en $t=0$ medimos el observable A podemos obtener los dos valores a_1 y a_2, las probabilidades serán:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_A(0) &= |\langle 0|\psi(0)\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{10}\left|-i+2i\right|^2 = \frac{1}{10} \\ \mathcal{P}_A(2\alpha) &= |\langle 0|\psi(0)\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{10}\left|1+2\right|^2 = \frac{9}{10}\end{aligned}$$

Si el resultado de la primera medida es el valor 0, el estado justo después de la medida será:

$$\left|\psi(0^+)\right\rangle = |0\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|E_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|E_2\rangle$$

ya que se produce un reducción del paquete de ondas debido al proceso de medida. A partir de este momento, el estado comienza a evolucionar. Como el estado está escrito como una combinación lineal de los autovectores de $\hat{H}$, es inmediato obtener el estado en el instante t, ya que cada autovector de $\hat{H}$ evoluciona en el tiempo multiplicándolo por un término armónico cuya frecuencia es proporcional a la energía (recordar que los autovectores del hamiltoniano son los estados estacionarios), por tanto:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\hbar\omega t/\hbar}|E_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i2\hbar\omega t/\hbar}|E_2\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}|E_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i2\omega t}|E_2\rangle$$

Está claro que podemos obtener los valores E_1 y E_2 al medir la energía y con las siguientes probabilidades:

$$\mathcal{P}_E(0|E_1) = |\langle E_1|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{P}_E(0|E_2) = |\langle E_2|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

Por tanto, para este casos tenemos las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{A,H}(0,E_1) &= \mathcal{P}_A(0)\mathcal{P}_E(0|E_1) = \frac{1}{10}\frac{1}{2} = \frac{1}{20} \\ \mathcal{P}_{A,H}(0,E_2) &= \mathcal{P}_A(0)\mathcal{P}_E(0|E_2) = \frac{1}{10}\frac{1}{2} = \frac{1}{20}\end{aligned}$$

Por otro lado, si hubiéramos obtenido el valor 2α en la primera medida, el estado después de la medida, debido a la reducción del paquete de ondas, sería:

$$\left|\psi(0^+)\right\rangle = |2\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|E_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|E_2\rangle$$

Este estado evolucionaría de la siguiente forma:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\hbar\omega t/\hbar}|E_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i2\hbar\omega t/\hbar}|E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}|E_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i2\omega t}|E_2\rangle$$

De modo, que si en el instante t hudiéramos medido el valor de la energía, se podrían obtener de nuevo los valores E_1 y E_2 pero con las probabilidades:

$$\mathcal{P}_H(2\alpha|E_1) = |\langle E_1|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{P}_H(2\alpha|E_2) = |\langle E_2|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

Las probabilidades para este caso son:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{A,H}(2\alpha,E_1) &= \mathcal{P}_A(0)\mathcal{P}_H(0|E_1) = \frac{9}{10}\frac{1}{2} = \frac{9}{20} \\ \mathcal{P}_{A,H}(2\alpha,E_2) &= \mathcal{P}_A(0)\mathcal{P}_H(0|E_2) = \frac{9}{10}\frac{1}{2} = \frac{9}{20}\end{aligned}$$

En resumen, las probabilidades que buscamos son:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{A,H}(0,E_1) &= \mathcal{P}_A(0)\mathcal{P}_H(0|E_1) = \frac{1}{10}\frac{1}{2} = \frac{1}{20} \\ \mathcal{P}_{A,H}(0,E_2) &= \mathcal{P}_A(0)\mathcal{P}_H(0|E_2) = \frac{1}{10}\frac{1}{2} = \frac{1}{20} \\ \mathcal{P}_{A,H}(2\alpha,E_1) &= \mathcal{P}_A(0)\mathcal{P}_H(0|E_1) = \frac{9}{10}\frac{1}{2} = \frac{9}{20} \\ \mathcal{P}_{A,H}(2\alpha,E_2) &= \mathcal{P}_A(0)\mathcal{P}_H(0|E_2) = \frac{9}{10}\frac{1}{2} = \frac{9}{20}\end{aligned}$$

Estas probabilidades no dependen del tiempo ya que una vez que hemos medido A, como el hamiltoniano es una constante del movimiento sus probabilidades no dependen del tiempo que transcurre desde la primera medida. Vamos a calcular ahora el caso contrario. Lo podemos hacer un poco más rápido.

- Caso $E = E_1$ en la primera medida. Este caso ocurre con una probabilidad $1/5$. El estado después de la medida debida a la reducción del paquete de ondas sería $|\psi(0^+)\rangle = |E_1\rangle$. Este estado evoluciona en el tiempo, pero al ser un estado estacionario la evolucion es trivial: $|\psi(t)\rangle = e^{-i\hbar\omega t/\hbar}\,|E_1\rangle$. Las probabilidades de que obtengamos los valores 0 y 2α en la segunda medida serán:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_A(E_1|0) &= |\langle 0|\psi(t)\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2} \\
\mathcal{P}_A(E_1|2\alpha) &= |\langle 2\alpha|\psi(t)\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} e^{-i\omega t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- Caso $E = E_2$ en la primera medida. Este caso ocurre con una probabilidad $4/5$. El estado después de la medida sería $|\psi(0^+)\rangle = |E_2\rangle$. Este estado evoluciona de nuevo de forma trivial: $|\psi(t)\rangle = e^{-i2\hbar\omega t}\,|E_2\rangle$. Las probabilidades de que obtengamos los valores 0 y 2α en la segunda medida serán:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_A(E_2|0) &= |\langle 0|\psi(t)\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & 1 \end{pmatrix} e^{-i2\omega t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2} \\
\mathcal{P}_A(E_2|2\alpha) &= |\langle 2\alpha|\psi(t)\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} e^{-i2\omega t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Las probabilidades en este caso son:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{H,A}(E_1, 0) &= \mathcal{P}_H(E_1)\mathcal{P}_A(E_1|0) = \frac{1}{5}\frac{1}{2} = \frac{1}{10} \\
\mathcal{P}_{H,A}(E_2, 0) &= \mathcal{P}_H(E_2)\mathcal{P}_A(E_2|0) = \frac{4}{5}\frac{1}{2} = \frac{4}{10} \\
\mathcal{P}_{H,A}(E_1, 2\alpha) &= \mathcal{P}_H(E_1)\mathcal{P}_A(E_1|0) = \frac{1}{5}\frac{1}{2} = \frac{1}{10} \\
\mathcal{P}_{H,A}(E_2, 2\alpha) &= \mathcal{P}_H(E_2)\mathcal{P}_A(E_2|2\alpha) = \frac{4}{5}\frac{1}{2} = \frac{4}{10}
\end{aligned}$$

Lógicamente no se obtienen los mismos resultados ya que A y $\hat{H}$ no conmutan (si A y $\hat{H}$ conmutaran, como $\hat{H}$ es diagonal A también lo tendría que ser ya que estamos en un espacio de dimensión 2). En este caso las probabilidades tampoco dependen del tiempo, ya que cuando medimos $\hat{H}$ en la primera medida, el estado se reduce a un estado estacionario, de modo que las probabilidades para A en la segunda medida no pueden depender del tiempo.

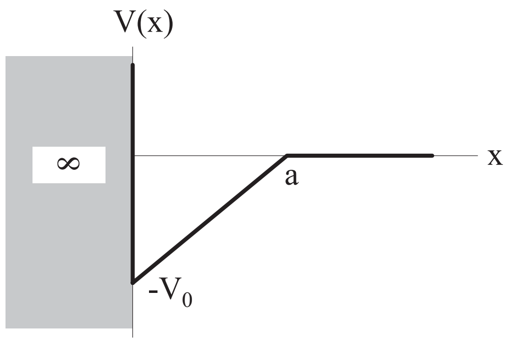
2.- La regla de cuantización de la primitiva teoría cuántica establece que para una partícula que realiza un movimiento periódico en una sola dimensión se verifica que:

$$\oint p(x)\; dx = nh,$$

siendo n un número entero.

Aplicar esta regla de cuantización para obtener la energía del estado fundamental de una partícula que se mueve en el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{para } x < 0 \\ -V_0\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) & \text{para } 0 < x < a \\ 0 & \text{para } x > a \end{cases} .$$



Comprobar que el resultado obtenido tiene las dimensiones de una energía.

¿Cómo se puede interpretar físicamente la regla de cuantización anterior?

Solución.- Para que una partícula realice un movimiento periódico en este potencial, la energía tiene que ser negativa. En este caso, la partícula realizará un movimiento periódico entre los puntos $x = 0$ y $x = a(E + V_0)/V_0$, que son los puntos de retorno clásicos. Como la partícula realiza un movimiento simétrico en el camino de vuelta, respecto del de ida, la integral que nos piden es:

$$\oint p\ dx = 2\int_0^{a(E+V_0)/V_0} p\ dx = 2\int_0^{a(E+V_0)/V_0} \sqrt{2m\left(E-V(x)\right)}\ dx$$

Sustituimos el potencial, que en la región clásicamente pertimida vale $-V_0\left(1-\dfrac{x}{a}\right)$, e integramos:

$$\begin{aligned}
2\int_0^{a(E+V_0)/V_0}\sqrt{2m\left(E+V_0-V_0\frac{x}{a}\right)}\ dx &= 2\sqrt{2m\left(E+V_0\right)}\int_0^{a(E+V_0)/V_0}\sqrt{1-\frac{V_0}{E+V_0}\frac{x}{a}}\ dx \\
&= 2\sqrt{2m\left(E+V_0\right)}\frac{2}{3}\left(-\frac{E+V_0}{V_0}a\right)\left(1-\frac{V_0}{E+V_0}\frac{x}{a}\right)^{3/2}\Bigg|_0^{a(E+V_0)/V_0} = \\
&= \frac{4a}{3V_0}\sqrt{2m\left(E+V_0\right)}\left(E+V_0\right) = \frac{4a\sqrt{2m}}{3V_0}\left(E+V_0\right)^{3/2} = nh
\end{aligned}$$

Por tanto, despejando:

$$E = -V_0 + \left(\frac{4V_0 nh}{4a\sqrt{2m}}\right)^{2/3}$$

Para el estado fundamental $n=1$, de modo que:

$$E_{\text{fund}} = -V_0 + \left(\frac{4V_0 h}{4a\sqrt{2m}}\right)^{2/3}$$

Está claro que V_0 tiene dimensiones de una energía, pero que ocurrirá con el otro sumando?

$$\left[\left(\frac{4V_0 h}{4a\sqrt{2m}}\right)^{2/3}\right] = \left(\frac{ML^2T^{-2}ML^2T^{-1}}{LM^{1/2}}\right)^{2/3} = \left(M^{3/2}L^3T^{-3}\right)^{2/3} = ML^2T^{-2}$$

donde hemos tenido en cuenta que las dimensiones de la energía son ML^2T^{-2}, las de h son ML^2T^{-1}, las de a son L, y las de m son M.

La regla de cuantización se puede interpretar como una condición para que se forme una onda estacionaria, teniendo en cuenta la naturaleza ondulatoria de las partículas y que en los puntos de retorno clásico tenemos sendos nodos. Para que se pueda formar una onda estacionaria, en la región en la que se propaga la onda tiene que haber un número semientero o entero de longitudes de onda, es decir $n/2$ longitudes de onda, con $n = 1, 2, 3, \cdots$. Como la longitud de onda asociada a una partícula depende de la posición, el número de longitudes de onda que hay en la región clásicamente permitida, que es donde se supone que se podrá propagar la onda será:

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\lambda(x)} = \frac{n}{2}$$

donde x_1 y x_2 son los puntos de retorno clásicos. Vamos a trabajar un poco la expresión anterior:

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{p(x)\ dx}{h} = \frac{1}{2h}2\int_{x_1}^{x_2}p(x)\ dx = \frac{1}{2h}\oint p(x)\ dx = \frac{n}{2}$$

Por tanto queda la condición del enunciado.

3.- Una partícula está descrita mediante la siguiente función de onda...

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \le -a \\ \sin^2\left(\pi\dfrac{x}{a}\right) & \text{para } -a \le x \le a \\ 0 & \text{para } x \ge a \end{cases}$$

Normalizar la función de onda. Calcular el valor medio de la posición y la dispersión. ¿Podrías estimar el valor medio del momento y su dispersión?

Solución.- Este problema es bastante matemático. Vamos a normalizar la función de onda, teniendo en cuenta que todas las integrales del problema se pueden restringir a la región $-a \le x \le a$, ya que la función de onda es distinta de cero sólo en esta región.

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2\ dx = \int_{-a}^{a}\sin^4\left(\pi\frac{x}{a}\right)\ dx$$

Podemos hacer uso de la siguiente relación trigonométrica:

$$\sin^4\alpha = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha$$

de modo que:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int_{-a}^{a} \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{8}\cos\left(4\pi\frac{x}{a}\right)\right]\ dx = \frac{3a}{4}$$

(las integrales de los cosenos son nulas, ya que sus primitivas son senos que se anulan en los límites de integración)

Por tanto, la norma vale $\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = \sqrt{3a}/2$, y la función de onda normalizada vale:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \le -a \\ \frac{2}{\sqrt{3a}}\ \sin^2\left(\pi\frac{x}{a}\right) & \text{para } -a \le x \le a \\ 0 & \text{para } x \ge a \end{cases}$$

Vamos a calcular ahora el valor medio de la posición:

$$\langle x\rangle = \langle\psi|\,\hat{x}\,|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\ |\psi(x)|^2\ dx = \int_{-a}^{a} x\ \sin^4\left(\pi\frac{x}{a}\right)\ dx = 0$$

La integral es nula, puesto que el integrando es impar. Calulamos ahora la dispersión, para lo cual nos hace falta el valor medio de x^2:

$$\left\langle x^2\right\rangle = \langle\psi|\,\hat{x}^2\,|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\ |\psi(x)|^2\ dx = \int_{-a}^{a} x^2\ \frac{4}{3a}\sin^4\left(\pi\frac{x}{a}\right)\ dx$$

Utilizamos de nuevo la relación trogonométrica anterior:

$$\begin{aligned} \left\langle x^2\right\rangle &= \frac{4}{3a}\int_{-a}^{a} x^2\ \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{8}\cos\left(4\pi\frac{x}{a}\right)\right]\ dx = \\ &= \frac{a^2}{3} - \frac{2}{3a}\int_{-a}^{a} x^2\ \cos\left(2\pi\frac{x}{a}\right)\ dx + \frac{1}{6a}\int_{-a}^{a} x^2\ \cos\left(4\pi\frac{x}{a}\right)\ dx \end{aligned}$$

Por otro lado, en el libro de tablas viene la siguiente integral:

$$\int x^2\cos(\alpha x)\ dx = \frac{2x}{\alpha^2}\cos(\alpha x) + \left(\frac{x^2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^3}\right)\sin(\alpha x)$$

Teniendo en cuenta que $\cos(2\pi) = \cos(4\pi)\ = 1$ y $\sin(2\pi) = \sin(4\pi)\ = 0$, las integrales quedan:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} x^2\ \cos\left(2\pi\frac{x}{a}\right)\ dx &= 4a\frac{a^2}{4\pi^2} = \frac{a^3}{\pi^2} \\ \int_{-a}^{a} x^2\ \cos\left(4\pi\frac{x}{a}\right)\ dx &= 4a\frac{a^2}{16\pi^2} = \frac{a^3}{4\pi^2} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\left\langle x^2\right\rangle = \frac{a^2}{3} - \frac{2}{3a}\frac{a^3}{\pi^2} + \frac{1}{6a}\frac{a^3}{4\pi^2} = \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{8\pi^2}\right)a^2 = 0.27000759\ldots a^2$$

Lógicamente es positivo. Por otro lado, lo que piden es la dispersión, que vale:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{5}{8\pi^2}\right)a^2 - 0} = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{5}{8\pi^2}}a = 0.5196225\ldots a$$

Podemos estimar el valor medio del momento escribiendo la función de onda como combinación lineal de exponenciales imaginarias, ya que estas exponenciales son las autofunciones del operador momento (más en concreto $e^{ipx/\hbar}/\sqrt{2\pi\hbar}$):

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \le -a \\ \frac{2}{\sqrt{3a}}\ \sin^2\left(\pi\frac{x}{a}\right) = \frac{2}{\sqrt{3a}}\ \left(\frac{e^{i\pi x/a} + e^{-i\pi x/a}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{2\sqrt{3a}}\left(e^{i2\pi x/a} + e^{-i2\pi x/a} + 2\right) & \text{para } -a \le x \le a \\ 0 & \text{para } x \ge a \end{cases}$$

En la región $-a \le x \le a$, si nos fijamos en el paréntesis, aparece la exponencial $e^{i2\pi x/a}$, que corresponde a un valor del momento $2\pi\hbar/a = h/a$, pero como tenemos otra exponecial con la misma amplitud (es decir, multiplicada por un uno como la anterior) de la forma $e^{-i2\pi x/a}$, a la que corresponde un momento $-2\pi\hbar/a = -h/a$, la contribución de estas dos exponenciales al valor medio del momento será nula. Por otro lado, el último sumando del paréntesis es un 2, que no tiene momento. Podemos concluir que el valor medio del momento es nulo.

Por último, podemos estimar la dispersión del momento a partir de la dispersión de la posición y del principio de indeterminación:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \text{de modo que} \qquad \Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\hbar}{2\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{5}{8\pi^2}a}}$$

4.- La evolución temporal de una partícula viene determinada por el siguiente operador hamiltoniano:

$$\hat{H} = \alpha\hat{x} + \beta\hat{p}$$

Aplicar el teorema de Ehrenfest para obtener las ecuaciones que nos dan la evolución temporal de los valores medios de la posición y del momento, así como de las correspondientes dispersiones, si en $t = 0$ partimos de las siguientes condiciones iniciales:

$$\langle x\rangle(0) = x_0, \qquad \langle p\rangle(0) = p_0, \qquad \Delta x(0) = \delta_x, \qquad \Delta p(0) = \delta_p$$

¿Como podemos definir la densidad de corriente de probabilidad para esta partícula?

Solución.- Vamos a aplicar sistemáticamente la siguiente ecuación:

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[A, \hat{H}\right]\right\rangle + \left\langle\frac{dA}{dt}\right\rangle$$

teniendo en cuenta que para todos los operadores que vamos a considerar, el último término es nulo, ya que son operadores que no dependen explícitamente del tiempo. Comenzamos con la evolución del valor medio de la posición:

$$\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{x}, \hat{H}\right]\right\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{x}, \alpha\hat{x} + \beta\hat{p}]\rangle = \beta$$

Podemos integrar ya:

$$\langle x\rangle(t) = \langle x\rangle(0) + \beta t = x_0 + \beta t$$

Hacemos lo mismo para el momento:

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{p}, \hat{H}\right]\right\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{p}, \alpha\hat{x} + \beta\hat{p}]\rangle = -\alpha$$

Podemos integrar también directamente:

$$\langle p\rangle(t) = \langle p\rangle(0) - \alpha t = p_0 - \alpha t$$

Vamos a calcular ahora las dispersiones, para lo cual tenemos que conocer las evoluciones temporales de $\langle x^2\rangle$ y $\langle p^2\rangle$:

$$\frac{d\langle x^2\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{x}^2, \hat{H}\right]\right\rangle = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{x}^2, \alpha\hat{x} + \beta\hat{p}\right]\right\rangle = 2\beta\langle x\rangle = 2\beta x_0 + 2\beta^2 t$$

Integramos esta ecuación:

$$\langle x^2\rangle(t) = \langle x^2\rangle(0) + 2\beta x_0 t + \beta^2 t^2$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
\Delta x^2(t) &= \langle x^2\rangle(t) - \langle x\rangle^2(t) = \langle x^2\rangle(0) + 2\beta x_0 t + \beta^2 t^2 - (x_0 + \beta t)^2 = \\
&= \langle x^2\rangle(0) + 2\beta x_0 t + \beta^2 t^2 - x_0^2 - \beta^2 t^2 - 2x_0\beta t = \langle x^2\rangle(0) - x_0^2 = \langle x^2\rangle(0) - \langle x\rangle^2(0) = \\
&= \Delta x^2(0) = \delta_x^2
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\Delta x(t) = \delta_x$$

Hacemos lo mismo para el momento:

$$\frac{d\langle p^2\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{p}^2, \hat{H}\right]\right\rangle = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{p}^2, \alpha\hat{x} + \beta\hat{p}\right]\right\rangle = -2\alpha\langle p\rangle = -2\alpha p_0 + 2\alpha^2 t$$

Integramos esta ecuación:

$$\langle p^2\rangle(t) = \langle p^2\rangle(0) - 2\alpha p_0 t + \alpha^2 t^2$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
\Delta p^2(t) &= \langle p^2\rangle(t) - \langle p\rangle^2(t) = \langle p^2\rangle(0) - 2\alpha p_0 t + \alpha^2 t^2 - (p_0 - \alpha t)^2 = \\
&= \langle p^2\rangle(0) - 2\alpha p_0 t + \alpha^2 t^2 - p_0^2 - \alpha^2 t^2 + 2p_0\alpha t = \langle p^2\rangle(0) - p_0^2 = \langle p^2\rangle(0) - \langle p\rangle^2(0) = \\
&= \Delta p^2(0) = \delta_p^2
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\Delta p(t) = \delta_p$$

Por último, vamos a ver cómo definir el operador velocidad para así obtener la expresión de la densidad de corriente de probabilidad. Podemos ver de lo anterior que:

$$\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \langle v\rangle = \beta$$

Por tanto el operador velocidad, $\hat{v}$, es una constante (β) y la densidad de corriente de probabilidad valdrá:

$$j(x,t) = \mathrm{Re}\left[\psi^*(x,t)\hat{v}\psi(x,t)\right] = \mathrm{Re}\left[\psi^*(x,t)\beta\psi(x,t)\right] = \beta\left|\psi(x,t)\right|^2$$