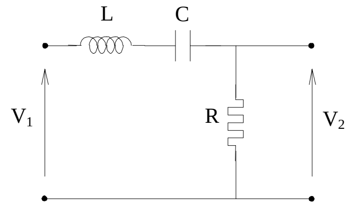
4.1 Filtro pasa-banda



Tomando como tensión de salida $\overline{V}_2$, la tensión en la resistencia del circuito serie RLC de la figura, esta es:

$$\overline{V}_2 = \overline{I}_1 \cdot R$$

y la tensión de entrada es:

$$\overline{V}_1 = \overline{I}_1 \cdot \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]$$

La ganancia en tensión es:

$$\overline{G}(j\omega) = \frac{\overline{V}_2}{\overline{V}_1} = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

$$\boxed{\overline{G}(j\omega) = \frac{R\angle 0^{\circ}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \angle \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}}$$

La magnitud o módulo de la ganancia es:

$$G(\omega) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \qquad \boxed{G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} \right)^2}}}$$

Dando valores crecientes a la frecuencia a partir de 0Hz se obtiene la curva de ganancia del circuito. Se observa que para la frecuencia de 0Hz y para valores elevados, la ganancia se anula, es decir, se atenúan considerablemente las frecuencias bajas y altas. Sin embargo existe un punto máximo en la curva que corresponde a la frecuencia de resonancia del circuito. A esta frecuencia la tensión de entrada $\overline{V}_1$ y la intensidad $\overline{I}_1$ están en fase, es decir, se anulan las impedancias reactivas del circuito.

$$\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C} \qquad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \boxed{f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

De la curva se puede deducir que existen dos puntos para $G_c = 1/\sqrt{2}$, es decir, hay dos frecuencias de corte f_{c1} y f_{c2}.

Como $G_{Vmax} = 1$:

$$G_c = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c L}{R} - \frac{1}{\omega_c RC} \right)^2}} \qquad 2 = 1 + \left(\frac{\omega_c L}{R} - \frac{1}{\omega_c RC} \right)^2$$

$$1 = \frac{\omega_c L}{R} - \frac{1}{\omega_c RC} = \frac{\omega_c^2 RLC - R}{\omega_c R^2 C} \qquad \omega_c^2 RLC - \omega_c R^2 C - R = 0 \qquad \omega_c^2 - \frac{R}{L}\omega_c - \frac{1}{LC} = 0$$

Esta ecuación de segundo grado tiene dos soluciones para ω_c y por tanto para f_c:

$$\omega_{c1} = \left| \frac{R}{2L} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}} \right| = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}} \qquad \boxed{f_{c1} = -\frac{R}{4\pi L} + \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}}$$

$$\omega_{c2} = \left| \frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}} \right| = \frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}} \qquad \boxed{f_{c2} = \frac{R}{4\pi L} + \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}}$$

El ancho de banda del filtro es:

$$\boxed{\Delta f = f_{c2} - f_{c1} = \frac{R}{2\pi L}}$$

La curva de la ganancia que se observa en la figura corresponde a unos valores de $R=100\Omega$, $L=20mH$ y $C=2\ \mu F$.

La frecuencia de resonancia es por tanto:

$$f_r = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{20 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}} = 795.77\ Hz$$

La frecuencia de corte inferior es:

$$f_{c1} = 491.82\ Hz$$

La frecuencia de corte superior es:

$$f_{c2} = 1287.59\ Hz$$

El ancho de banda del filtro es:

$$\Delta f = \frac{100}{2\pi \cdot 20 \cdot 10^{-3}} = 795.77\ Hz$$

Entre las frecuencias de corte la ganancia supera el valor 0.707.

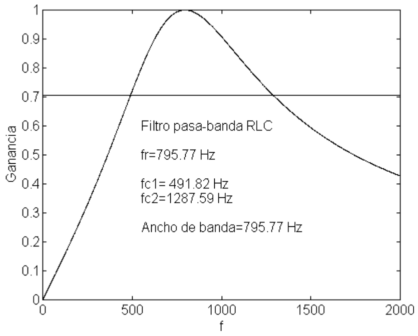
El ángulo de fase de la ganancia es:

$$\boxed{\alpha_G(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\omega RC} - \frac{\omega L}{R} \right)}$$

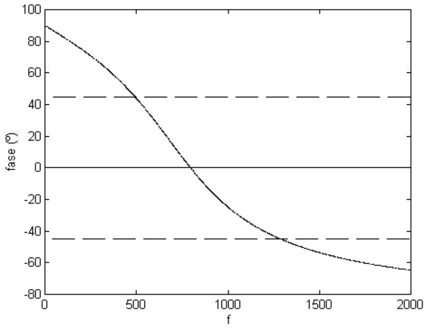
Dando valores a la frecuencia el ángulo es:

para	$\omega = 0$	$\Rightarrow$	$\alpha_G = 90^o$
para	$\omega = \omega_{c1}$	$\Rightarrow$	$\alpha_G = 45^o$
para	$\omega = \omega_r$	$\Rightarrow$	$\alpha_G = 0^o$
para	$\omega = \omega_{c2}$	$\Rightarrow$	$\alpha_G = -45^o$
para	$\omega = \infty$	$\Rightarrow$	$\alpha_G = -90^o$

La curva correspondiente al ángulo de la ganancia en función de la frecuencia es la mostrada en la figura.



Módulo de la ganancia en tensión



Ángulo de fase de la ganancia en tensión