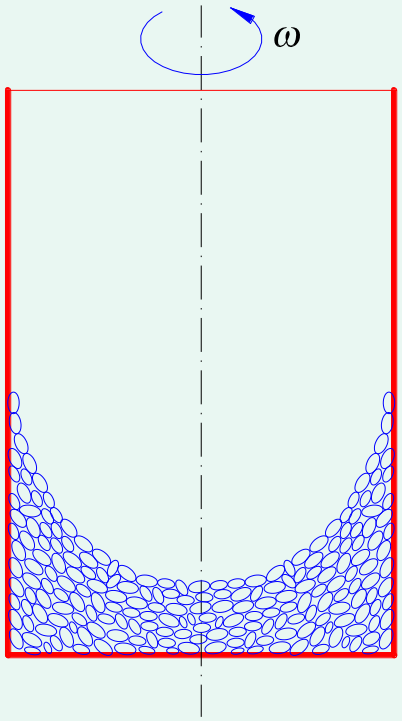
ESTÁTICA DE LOS FLUIDOS

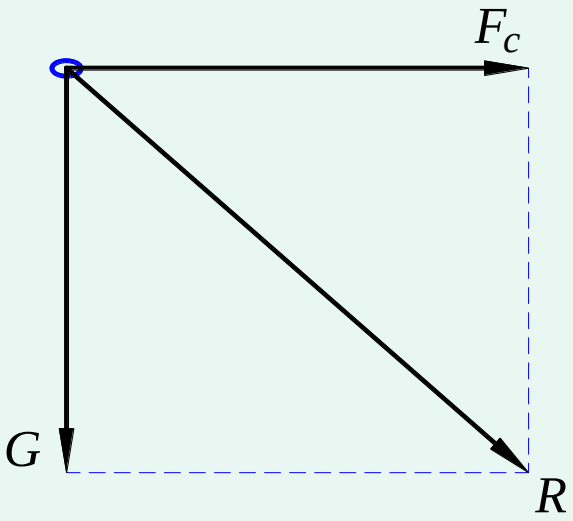
ESTÁTICA DE LOS FLUIDOS

- **EQUILIBRIO DE UN LÍQUIDO**
- **LÍQUIDO EN REPOSO**
- **LÍQUIDO GIRANDO ALREDEDOR DE EJE VERTICAL**
- **LÍQUIDDO UNIFORMEMENTE ACELERADO**
- **MANÓMETROS**
- **FUERZA SOBRE UNA PARED**
- **PRESAS**

Concepto de equilibrio

Cuando no existe movimiento ***relativo*** de unas partículas respecto a otras. No hay pues gradiente de velocidad entre capas: el fluido se comporta como ***no-viscoso*** y se mueve como si fuera un sólido.





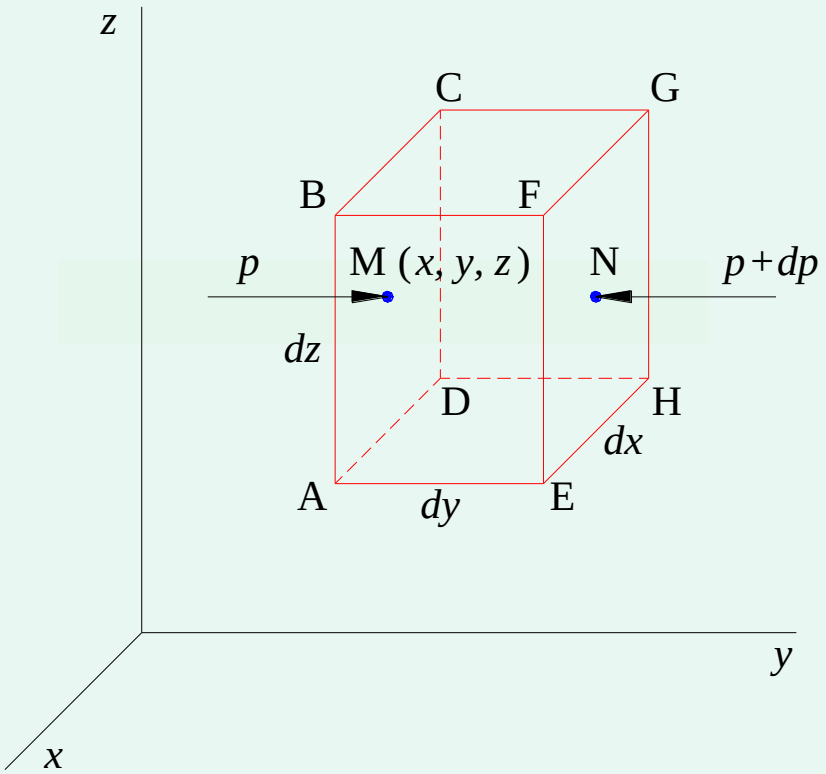
En el caso de figura actúa la gravedad y fuerza centrífuga

Ecuación de equilibrio

$$X = X(x, y, z)$$

$$Y = Y(x, y, z)$$

$$Z = Z(x, y, z)$$

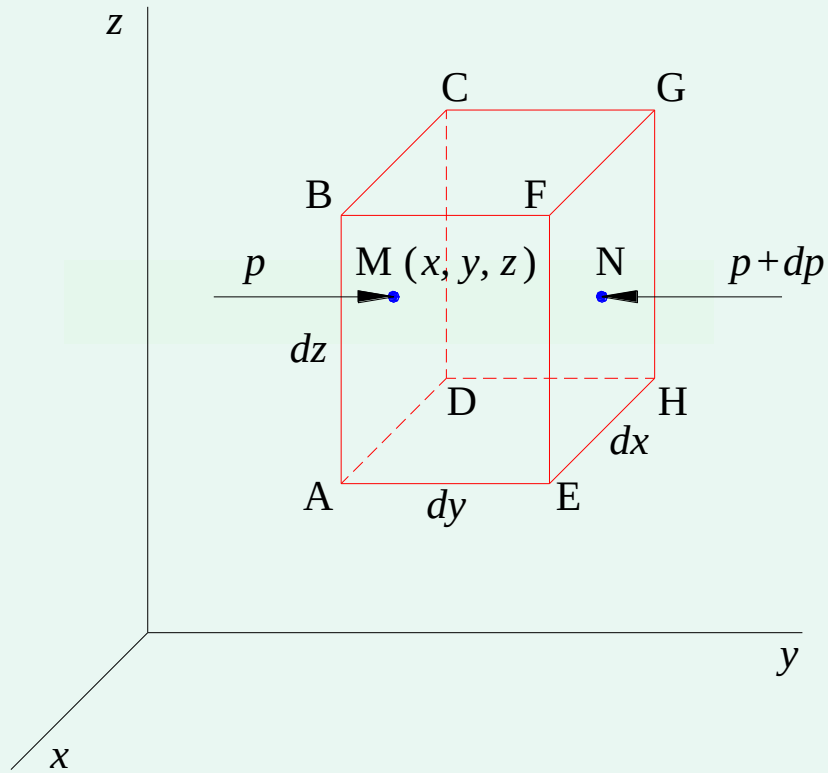


$$\vec{R} \cdot dm = \vec{R} \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \begin{cases} \rho \cdot X \cdot dx \cdot dy \cdot dz \\ \rho \cdot Y \cdot dx \cdot dy \cdot dz \\ \rho \cdot Z \cdot dx \cdot dy \cdot dz \end{cases}$$

Ecuación de equilibrio

$$p = p(x, y, z)$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz$$



Entre M y N,

$$dp = \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy \cdot dx \cdot dz = \rho \cdot Y \cdot dx \cdot dy \cdot dz;$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho \cdot Y$$

Condiciones de equilibrio

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \cdot X; \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \cdot Y; \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \cdot Z$$

Ecuación de equilibrio

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz = \rho \cdot (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz)$$

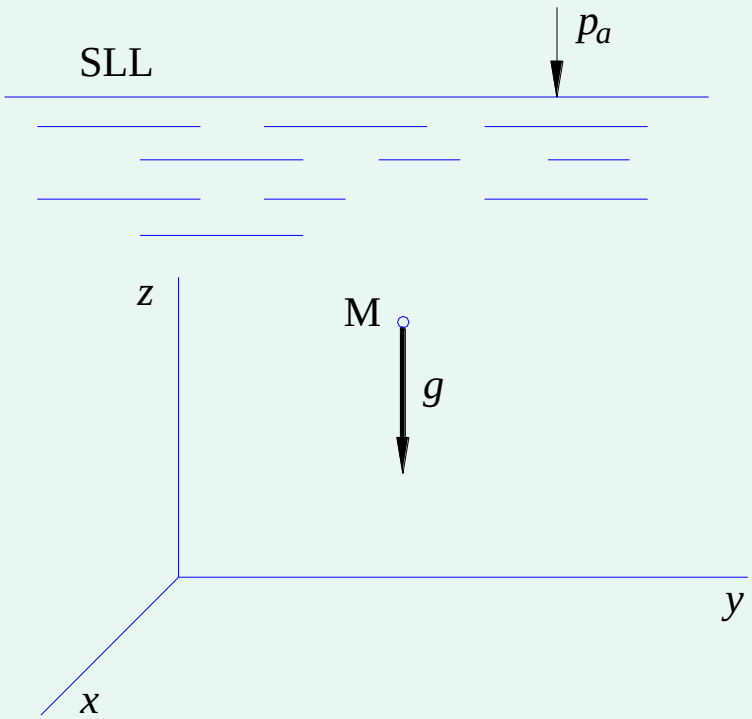
$$\boxed{dp = \rho \cdot (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz)}$$

Ecuación de las isobaras

$$\boxed{X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = 0}$$

Líquido en reposo

$$X = 0$$
$$Y = 0$$
$$Z = -g$$



Ecuación de las isobaras

$$X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = 0$$

$$-g \cdot dz = 0; \quad dz = 0$$

$$\boxed{z = K}$$

Diferencia de presión entre dos puntos

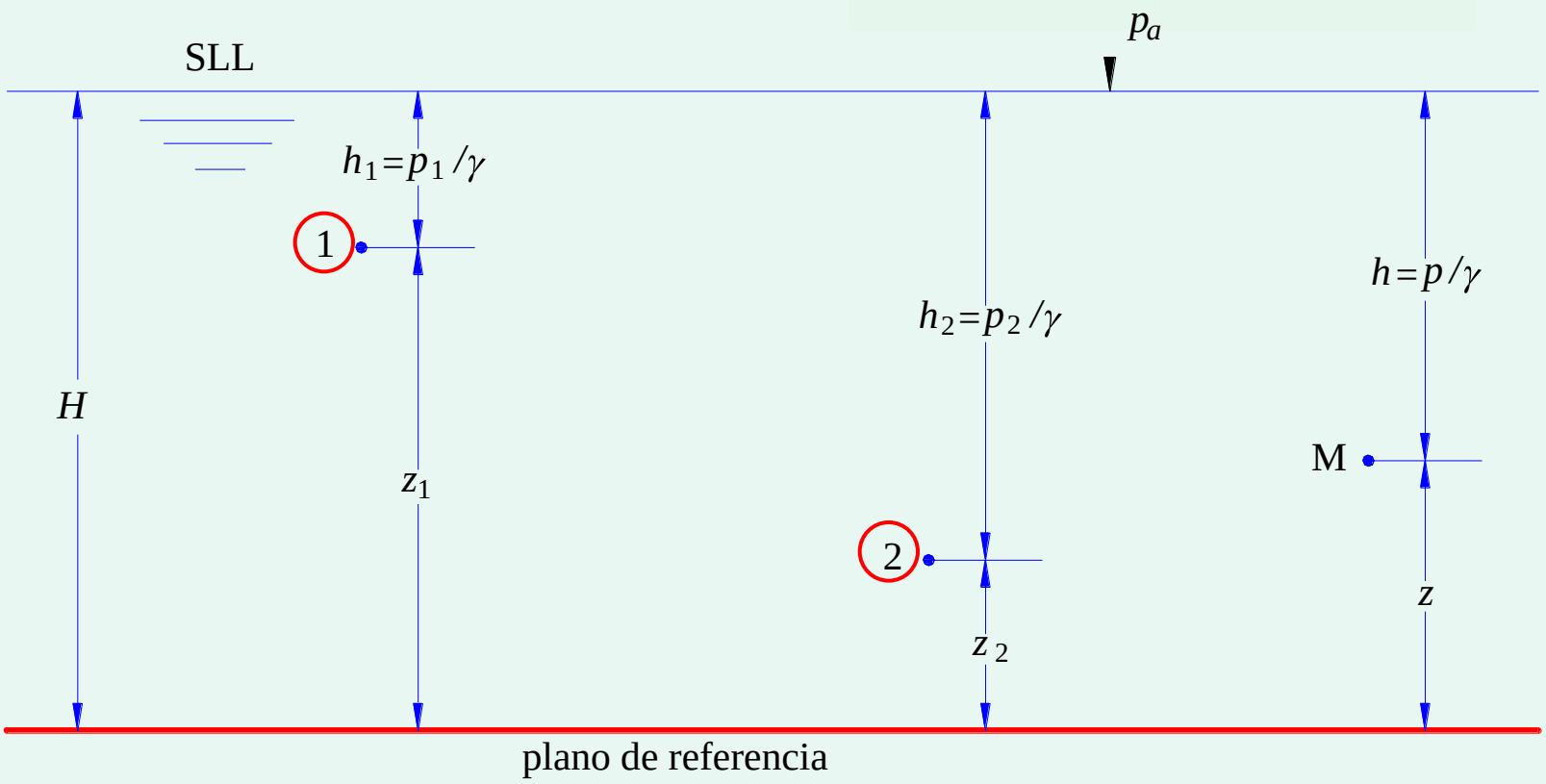
$$p_2 - p_1 = \rho \cdot \int_1^2 -g \cdot dz$$

$$\boxed{p_2 - p_1 = \gamma \cdot (z_1 - z_2)}$$

Energía de un líquido en reposo

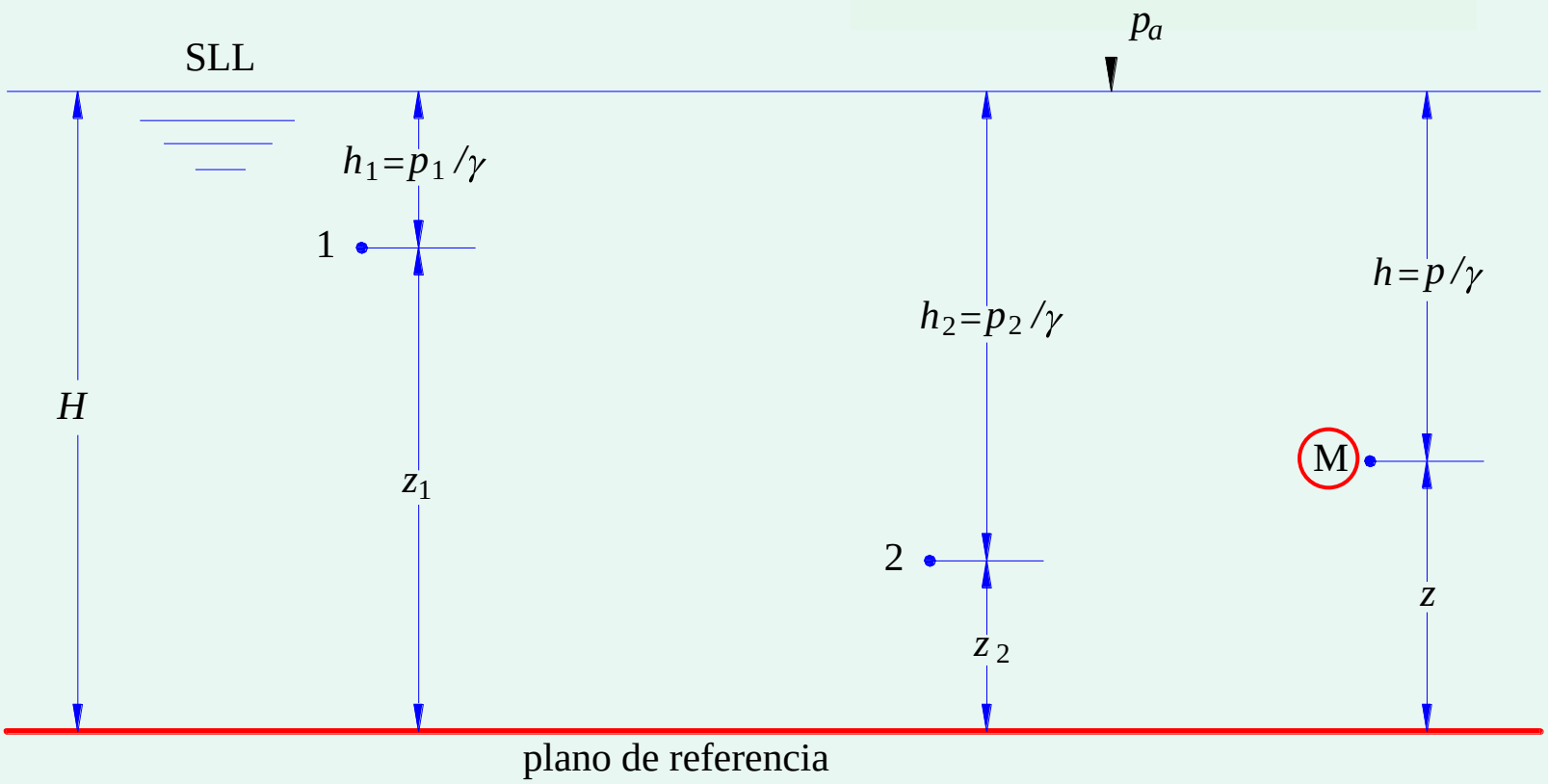
$$p_2 - p_1 = \gamma \cdot (z_1 - z_2)$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = H$$



Presión en un punto M

$$p - p_a = \gamma \cdot h \begin{cases} presión\ \ absoluta: p = p_a + \gamma \cdot h \\ presión\ \ relativa:\ \ p = \gamma \cdot h \end{cases}$$



Multiplicando por ***g·m*** (N en el S.I.) obtenemos energía $m \cdot g \cdot z$ (N m, ó J); y por kilogramo:

$$g \cdot z \ \text{ J/kg}$$

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 = \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 = g \cdot H = E}$$

la energía total, suma de la energía de presión y de la energía de posición, es la misma en todos los puntos de un líquido en reposo.

Líquido girando alrededor de un eje vertical

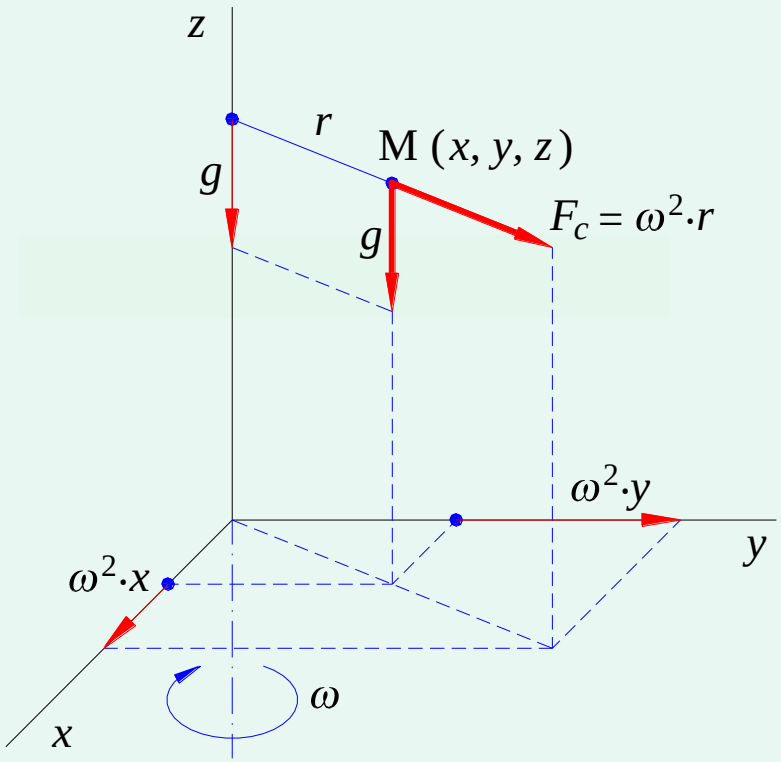
$$X = \omega^2 \cdot x$$

$$Y = \omega^2 \cdot y$$

$$Z = -g$$

$$X \cdot dx + Y \cdot dy + z \cdot dz = 0$$

$$\omega^2 \cdot x \cdot dx + \omega^2 \cdot y \cdot dy - g \cdot dz = 0$$



$$x^2 + y^2 - \frac{2 \cdot g}{\omega^2} \cdot z = K \qquad \text{y/o} \qquad r^2 - \frac{2 \cdot g}{\omega^2} \cdot z = K$$

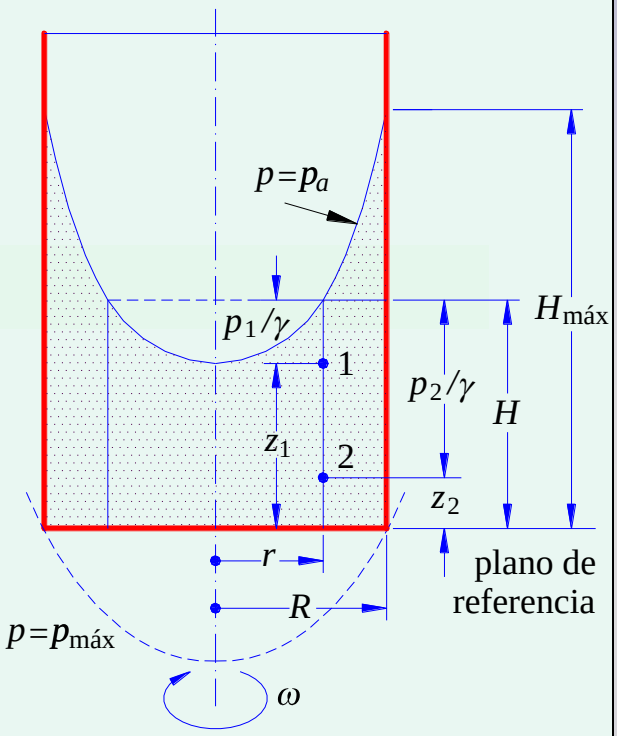
Diferencia de presión entre dos puntos

$$dp = \rho \cdot (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz)$$

$$dp = \rho \cdot (\omega^2 \cdot x \cdot dx + \omega^2 \cdot y \cdot dy - g \cdot dz)$$

$$p_2 - p_1 = \rho \cdot \frac{\omega^2}{2} \cdot \left(x^2 + y^2\right)_1^2 - \rho \cdot g \cdot (z)_1^2$$

$$\boxed{p_2 - p_1 = \rho \cdot \frac{\omega^2}{2} \cdot (r_2^2 - r_1^2) - \gamma \cdot (z_2 - z_1)}$$



Si $r_1 = r_2$ (en una misma vertical)

$$\boxed{p_2 - p_1 = \gamma \cdot (z_1 - z_2)}$$

igual que líquidos en reposo

Líquido uniformemente acelerado

Aceleración horizontal

$$X = 0$$

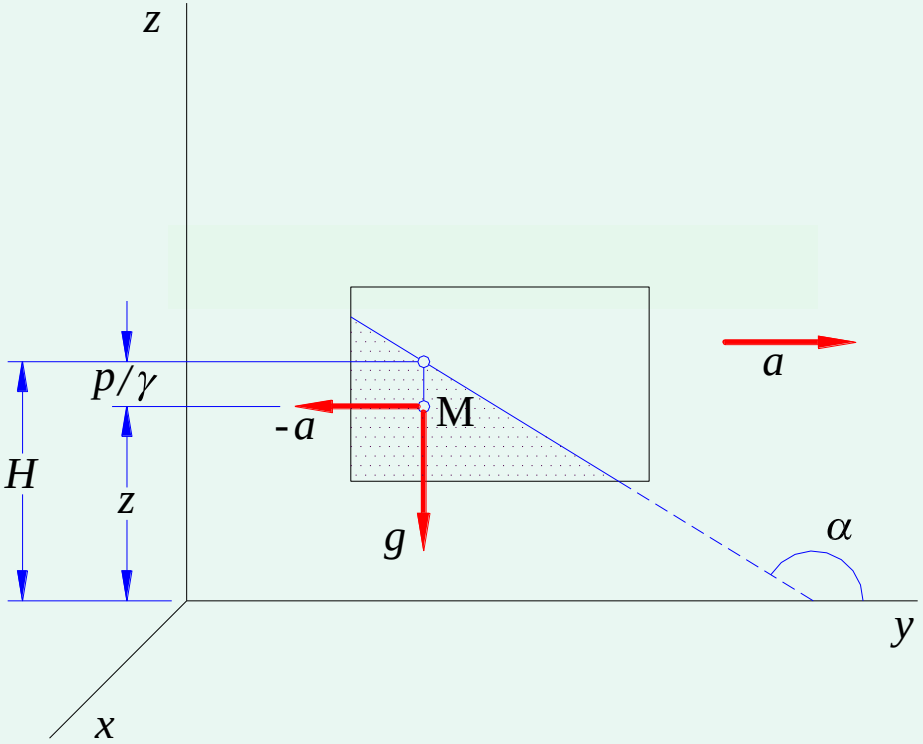
$$Y = -a$$

$$Z = -g$$

$$X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = 0$$

$$-a \cdot dy - g \cdot dz = 0;$$

$$dz = -\frac{a}{g} \cdot dy$$



$$\boxed{z = -\frac{a}{g} \cdot y + K} \qquad tg\alpha = -\frac{a}{g}$$

familia de isobaras: planos inclinados paralelos al eje *x*

Diferencia de presión entre dos puntos

$$dp = \rho \cdot (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz)$$

$$dp = \rho \cdot (-a \cdot dy - g \cdot dz)$$

$$p_2 - p_1 = \rho \cdot a \cdot (y_1 - y_2) + \gamma \cdot (z_1 - z_2)$$

Si los puntos 1 y 2 están en un mismo plano paralelo al *x*-*z* ($y_1 = y_2$):

$$\boxed{\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = H}$$

en general, la diferencia de presión entre dos puntos de una masa líquida en equilibrio que estén en la misma vertical, viene dada por el producto $g \cdot \Delta z$ en todos aquellos casos en los que, $Z = -g$.

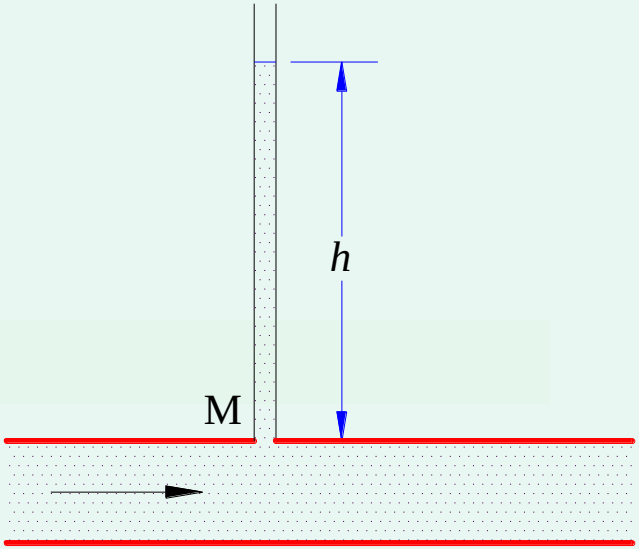
MANÓMETROS

Tubos piezométricos

Sólo para presiones pequeñas

Presión positiva

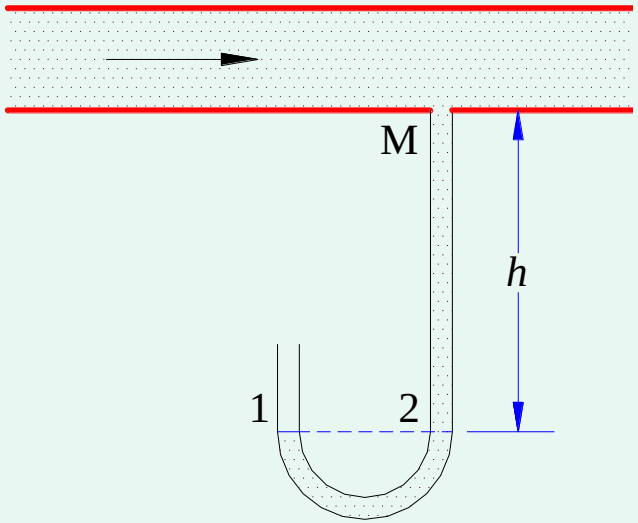
$$p_{\mathrm{M}} = \gamma \cdot h$$



Presión negativa

$$p_1 = p_2 \begin{cases} p_1 = p_a = 0\,(\text{relativo}) \\ p_2 = p_{\mathrm{M}} + \gamma \cdot h \end{cases}$$

$$p_{\mathrm{M}} = -\gamma \cdot h$$



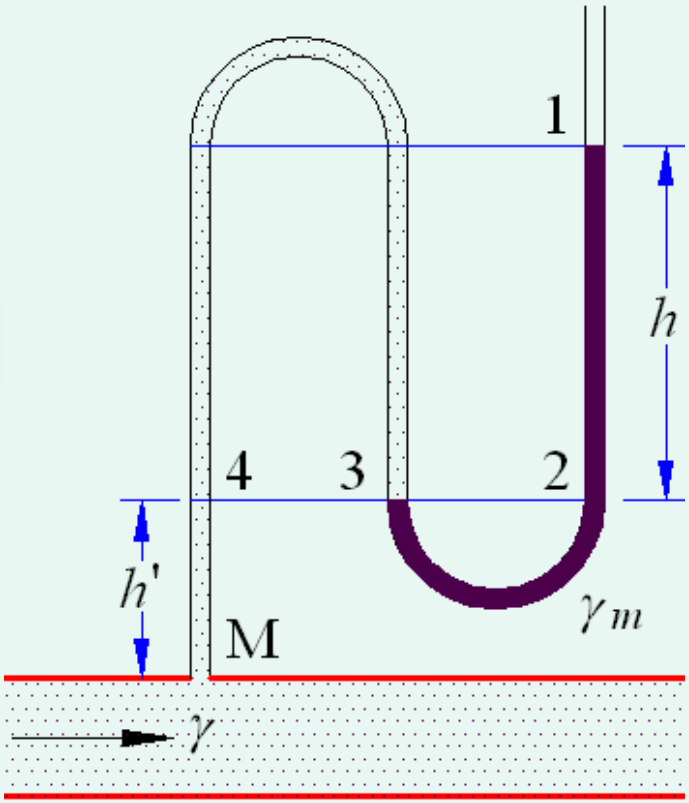
Manómetros de aire libre

$$p_2 = p_3$$

$$p_3 = p_4$$

$$p_{\mathrm{M}} = p_4 + \gamma \cdot h' = p_2 + \gamma \cdot h'$$

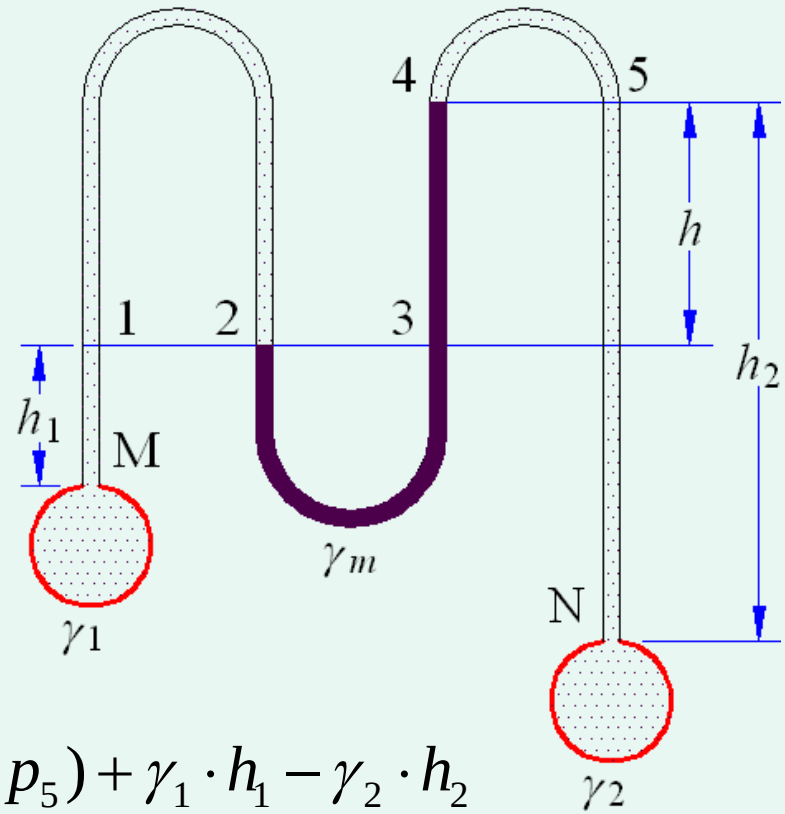
$$p_{\mathrm{M}} = \gamma_m \cdot h + \gamma \cdot h'$$



que además se deduce directamente.

Manómetros diferenciales

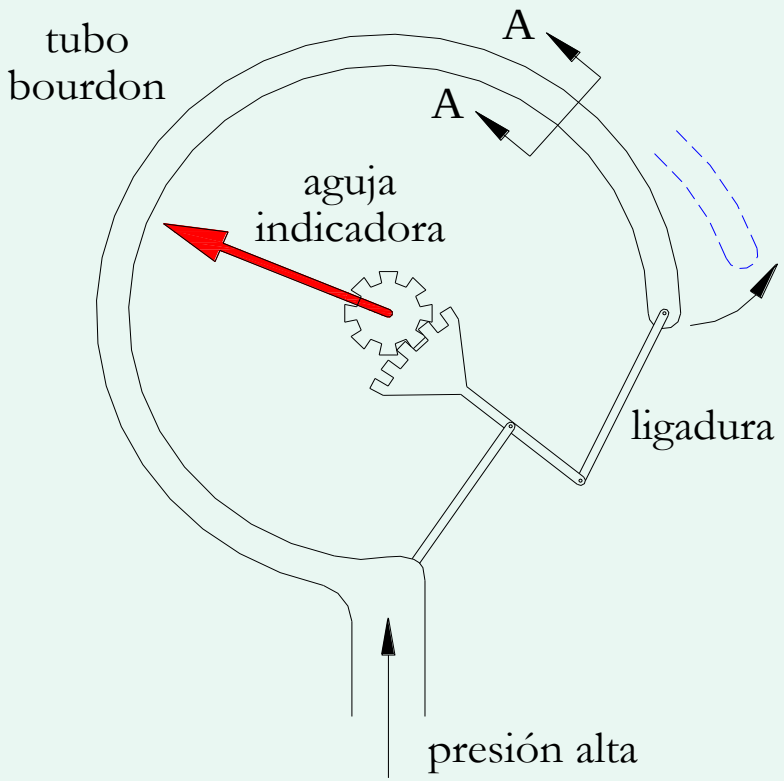
$$\left.\begin{array}{l} p_1 = p_2 = p_3 \\ p_4 = p_5 \end{array}\right\} p_3 = p_4 + \gamma_m \cdot h\,;$$



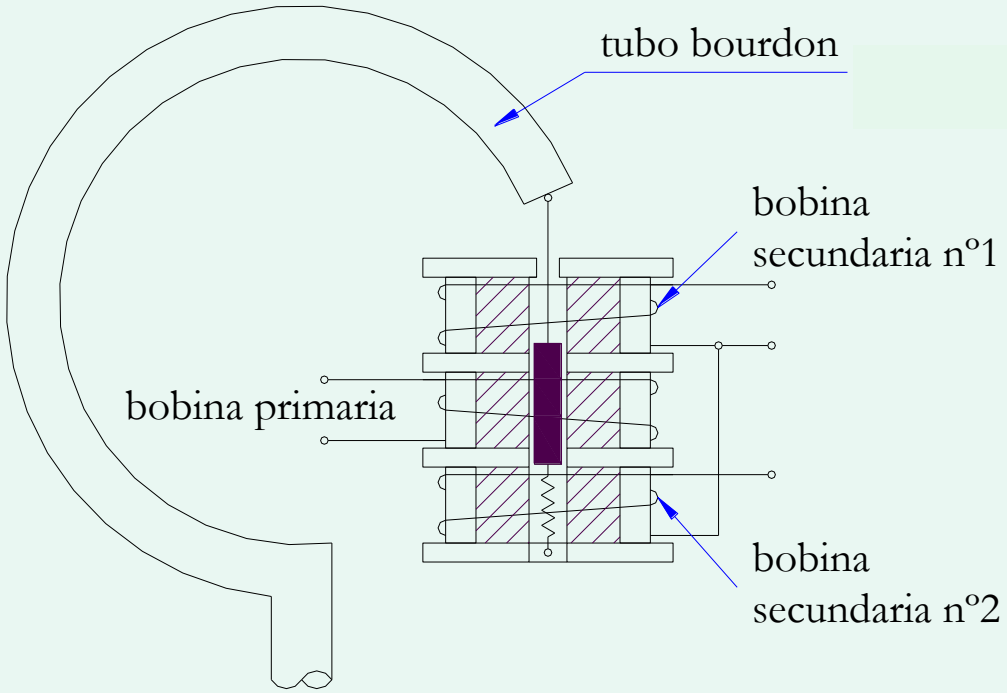
$$\left.\begin{array}{l} p_{\mathrm{M}} = p_1 + \gamma_1 \cdot h_1 \\ p_{\mathrm{N}} = p_5 + \gamma_2 \cdot h_2 \end{array}\right\} p_{\mathrm{M}} - p_{\mathrm{N}} = (p_1 - p_5) + \gamma_1 \cdot h_1 - \gamma_2 \cdot h_2$$

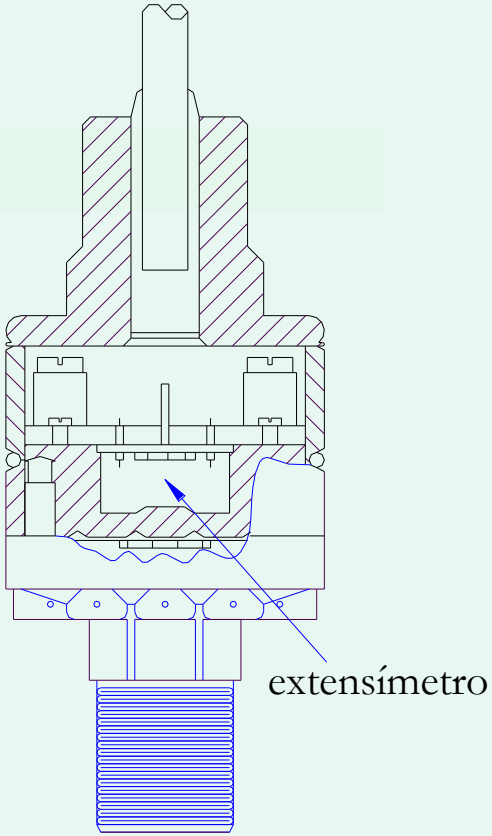
$$p_{\mathrm{M}} - p_{\mathrm{N}} = \gamma_m \cdot h + \gamma_1 \cdot h_1 - \gamma_2 \cdot h_2$$

Manómetros metálicos

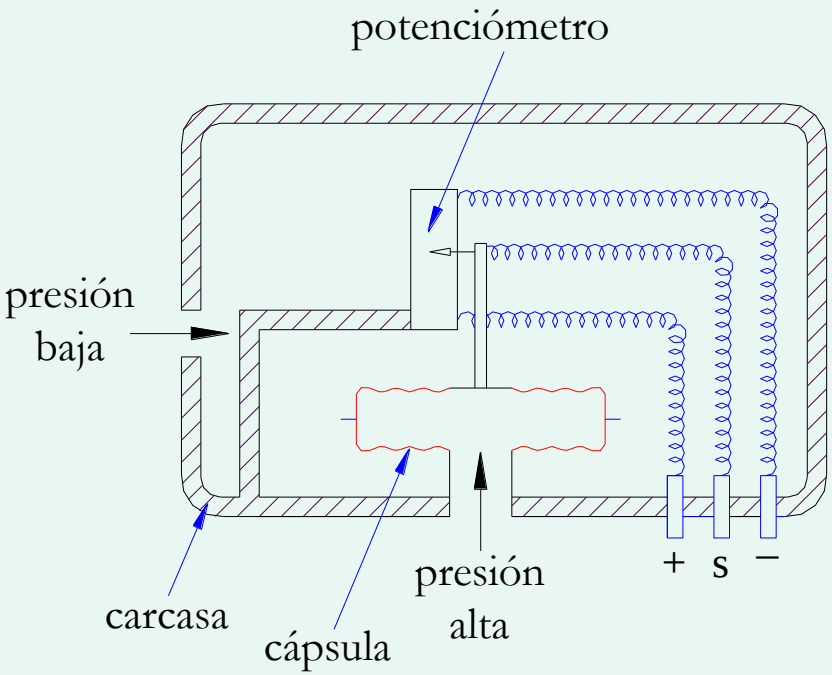


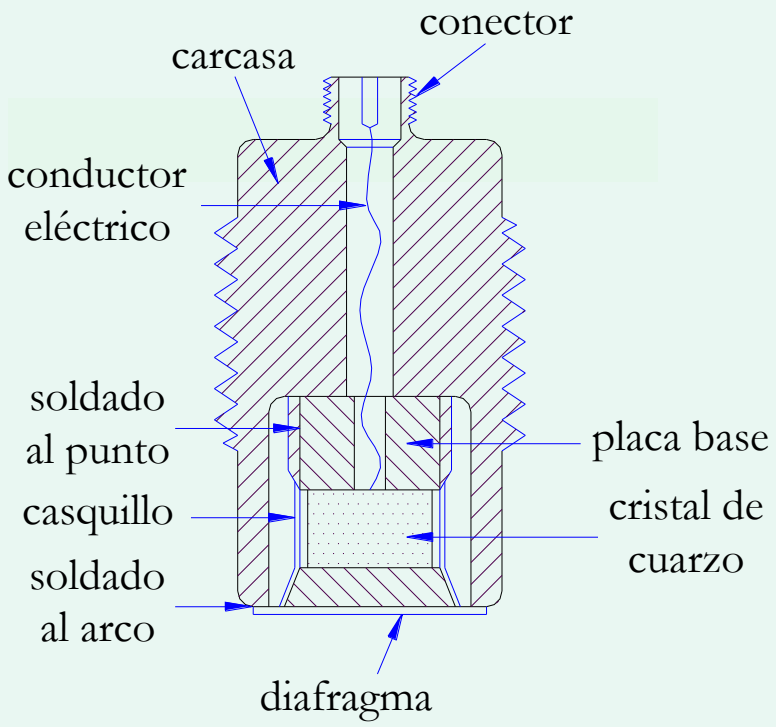
Manómetros eléctricos





Manómetros eléctricos





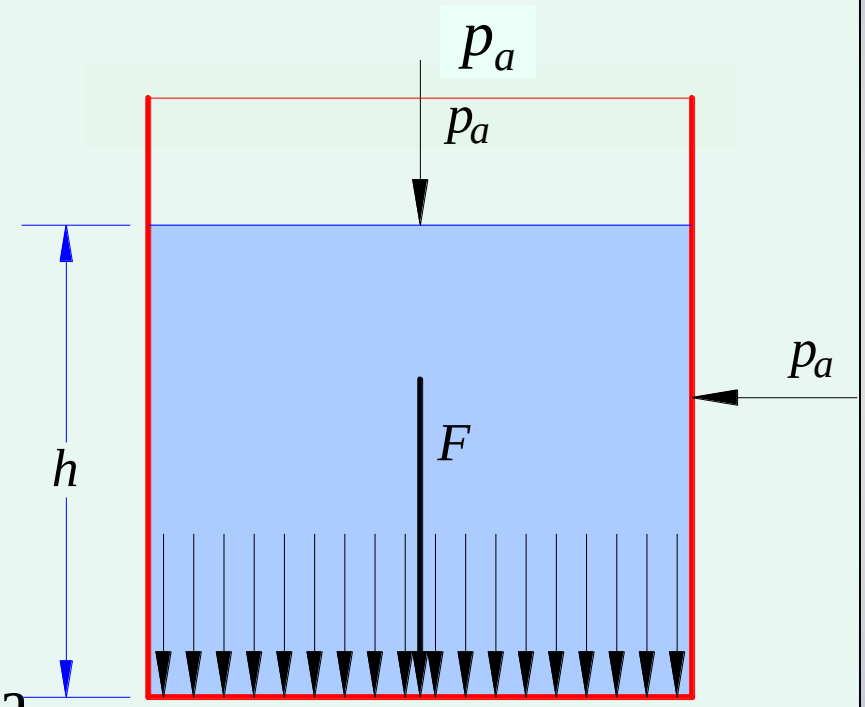
FUERZA DE UN LÍQUIDO SOBRE UNA PARED

Pared horizontal

$$F = p \cdot A = \gamma \cdot h \cdot A$$

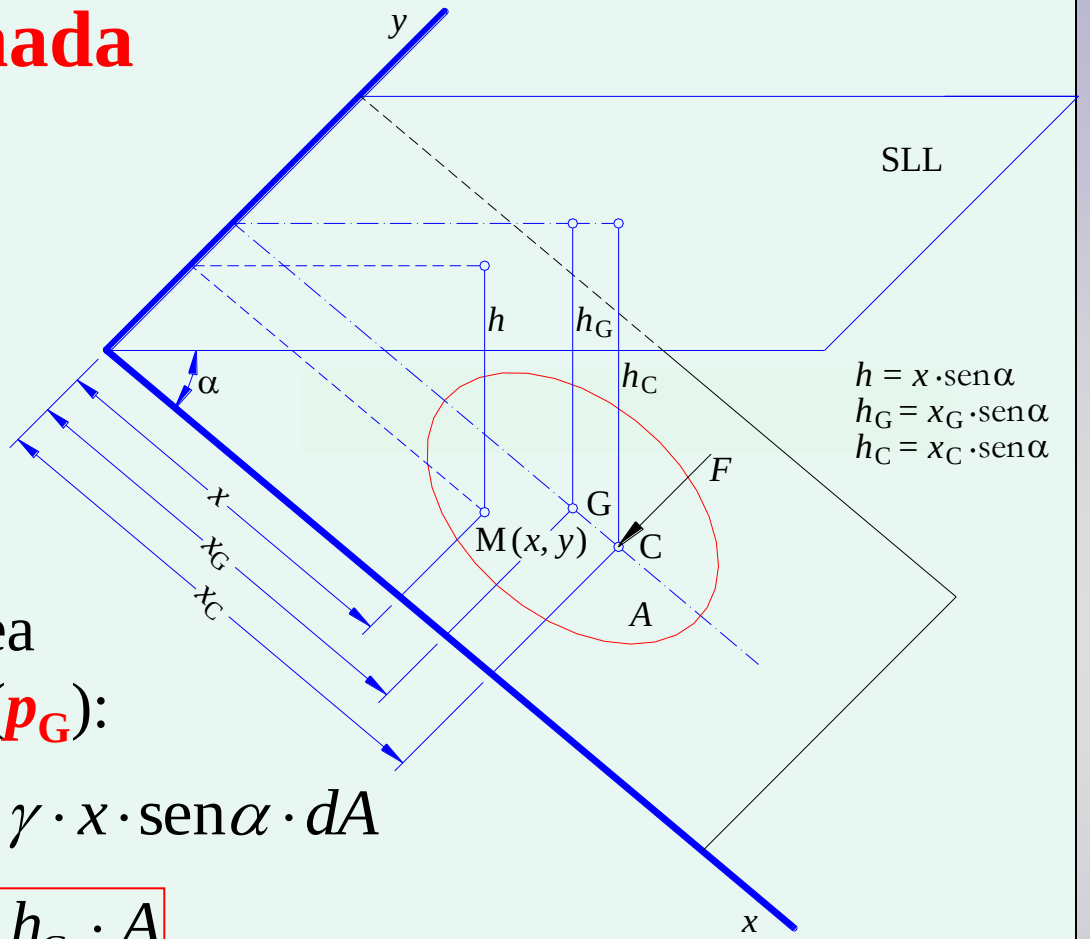
siendo A el área de la pared.

Para efectos de fuerzas sobre paredes, las presiones que intervienen son lógicamente las relativas, ya que la presión del ***entorno*** queda compensada al actuar por dentro y por fuera.



Pared plana inclinada

El plano ***y-x*** es el que contiene a la superficie ***A,*** que forma un ángulo ***α*** con la **SLL.**



La fuerza ***F*** sobre toda la superficie es igual al producto del área ***A*** por la presión media (***p_G***):

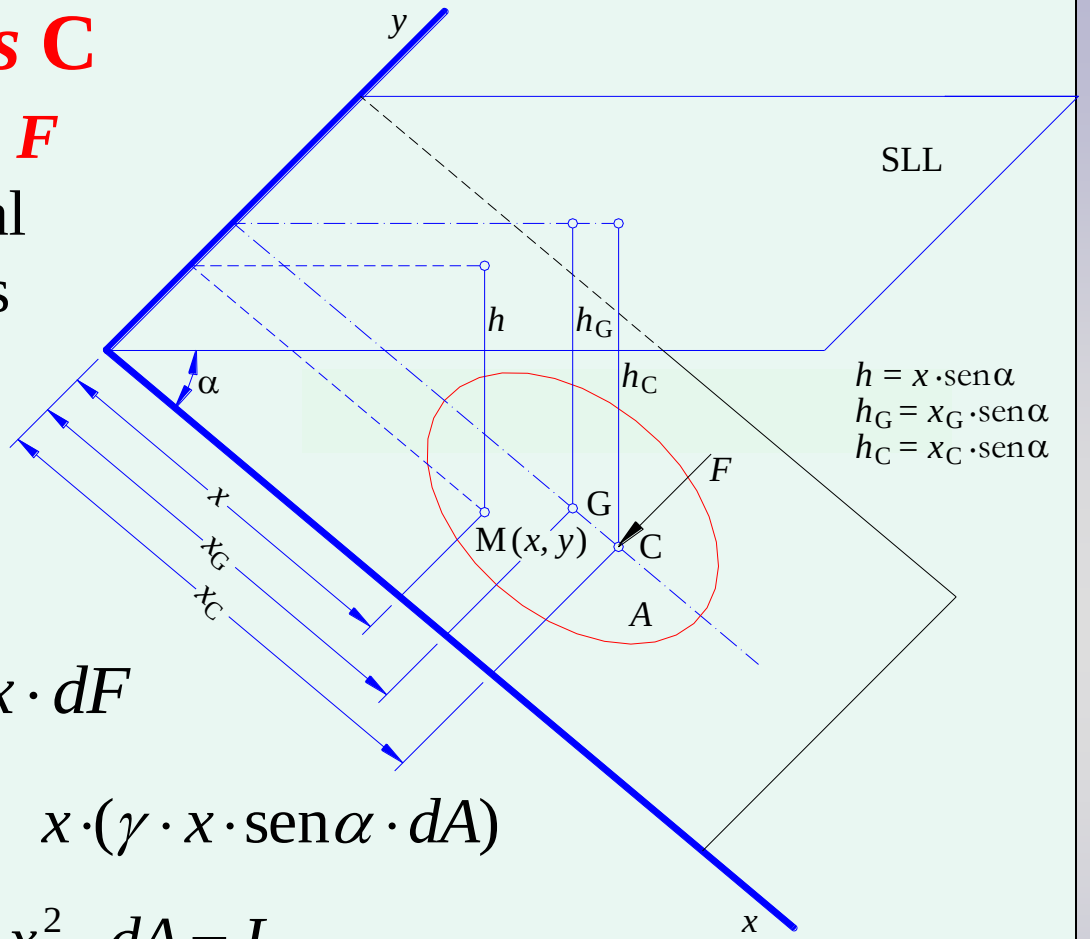
$$dF = p \cdot dA = \gamma \cdot h \cdot dA = \gamma \cdot x \cdot \text{sen}\alpha \cdot dA$$

$$\boxed{F = p_G \cdot A = \gamma \cdot h_G \cdot A}$$

Las presiones debajo de **G** son mayores que las de encima; en consecuencia, el punto de aplicación **C** de la fuerza ***F*** ha de estar por debajo de **G**.

Centro de presiones C

El momento de la fuerza ***F*** respecto del eje ***y*** es igual a la suma de los infinitos momentos respecto del mismo eje ***y***:



$$x_C \cdot F = \int_A x \cdot dF$$

$$x_C \cdot (\gamma \cdot x_G \cdot \text{sen}\alpha \cdot A) = \int_A x \cdot (\gamma \cdot x \cdot \text{sen}\alpha \cdot dA)$$

$$x_C \cdot x_G \cdot A = \int_A x^2 \cdot dA = I_y$$

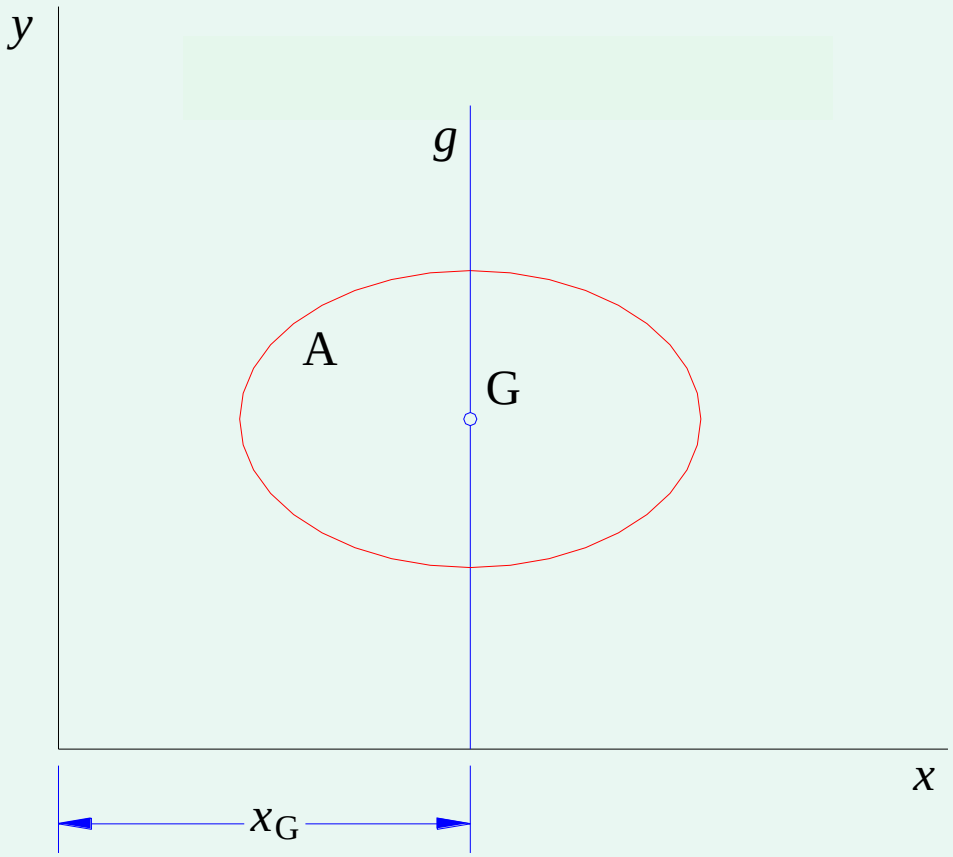
$$\boxed{x_C = \frac{I_y}{x_G \cdot A}}$$

Es mejor expresar el ***momento de inercia*** respecto del eje ***y*** (I_y) respecto del eje ***g*** (I_g) paralelo al eje ***y*** y que pasa por el centro de gravedad **G** de la superficie **A:**

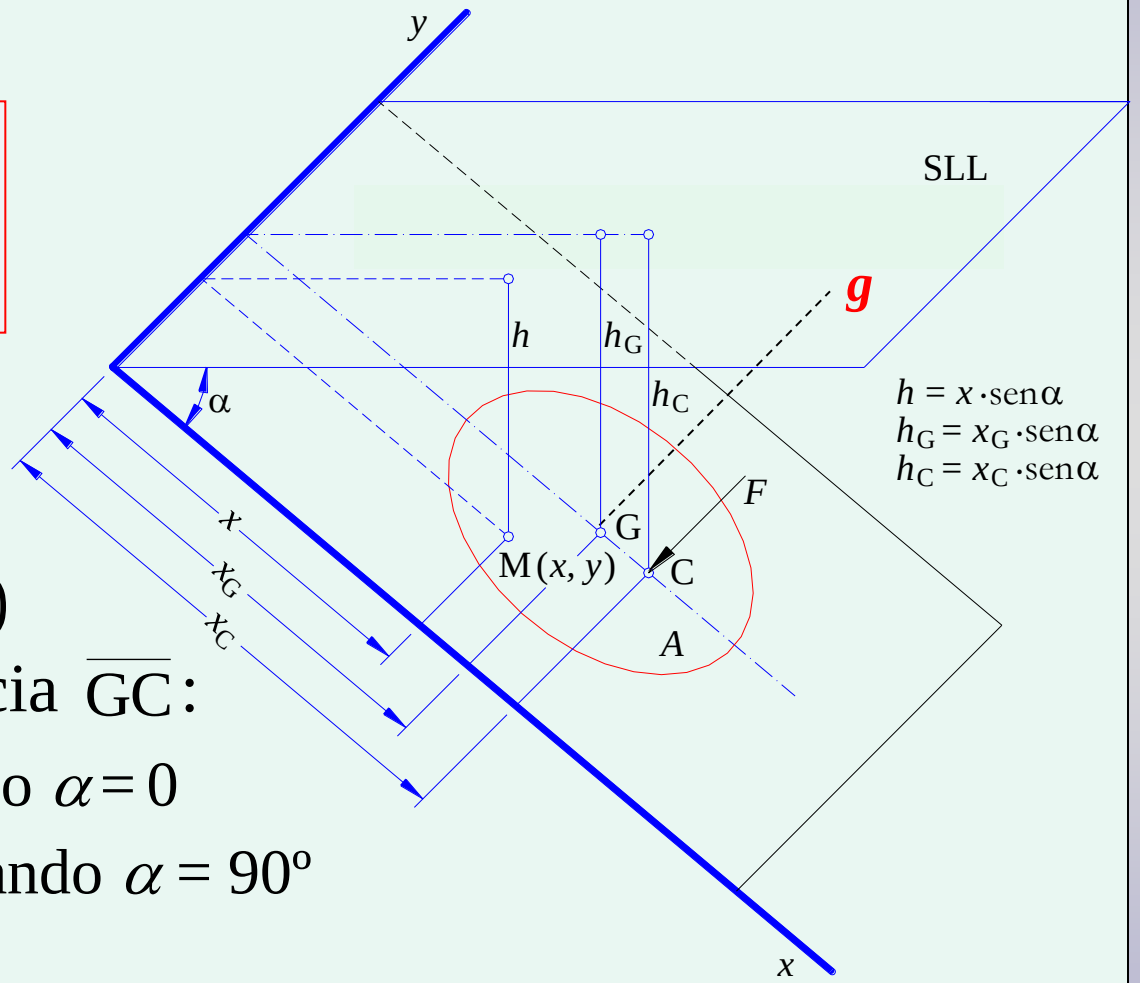
teorema de Steiner

$$I_y = I_g + x_G^2 \cdot A$$

$$\boxed{x_C = x_G + \frac{I_g}{x_G \cdot A}}$$



$$x_C = x_G + \frac{I_g}{x_G \cdot A}$$

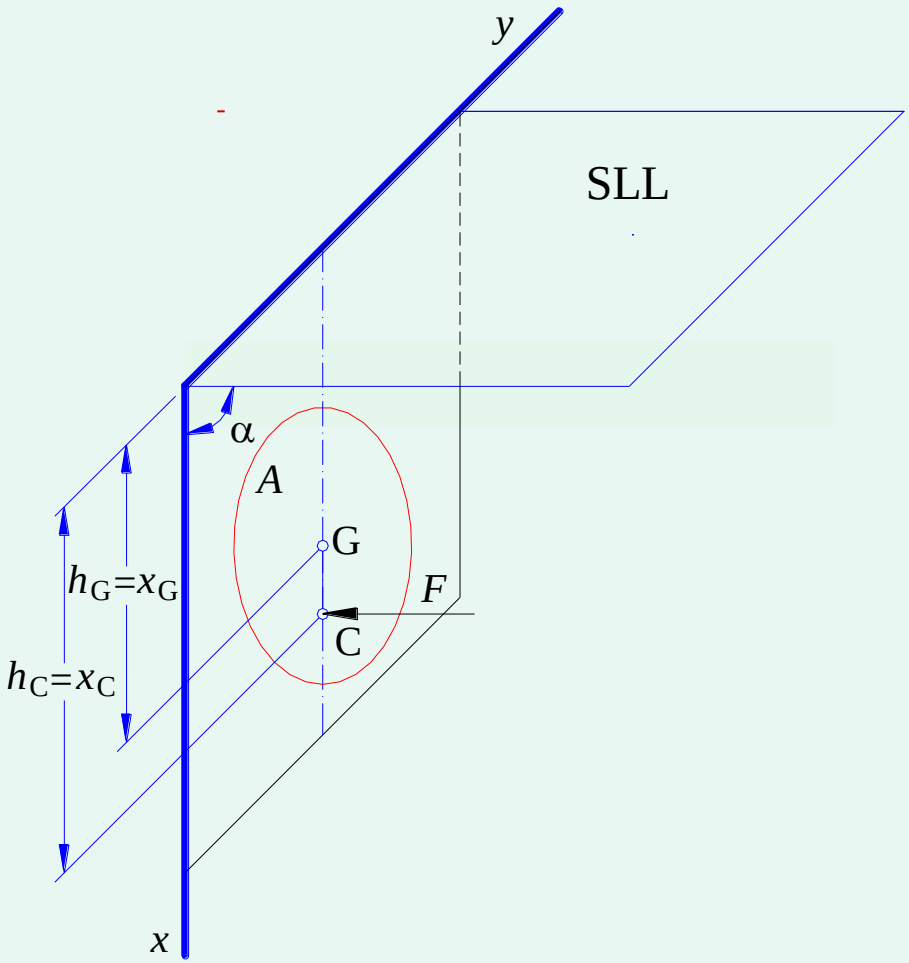


El término $I_g / (x_G \cdot A)$ representa la distancia $\overline{GC}$:

- $\overline{GC} = 0$ cuando $\alpha = 0$
- es máximo cuando $\alpha = 90^o$

Pared vertical

$$h_C = h_G + \frac{I_g}{h_G \cdot A}$$



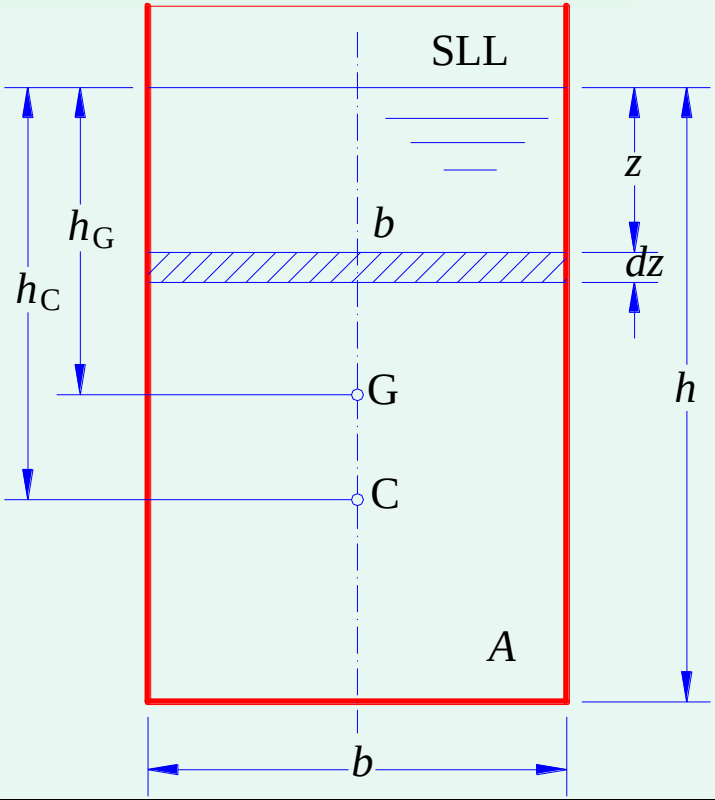
Cuanto más sumergida esté la superficie **A**, mayor será la altura $\boldsymbol{h_G}$ y en consecuencia menor la distancia entre **G** y **C.**

EJERCICIO

Calcúlese la fuerza y el centro de presiones sobre un rectángulo vertical, cuando el lado superior emerge o coincide con la superficie libre del líquido. Resuélvase:

a) sin aplicar las fórmulas (a modo de ejercicio teórico);

b) aplicando las fórmulas.



Solución

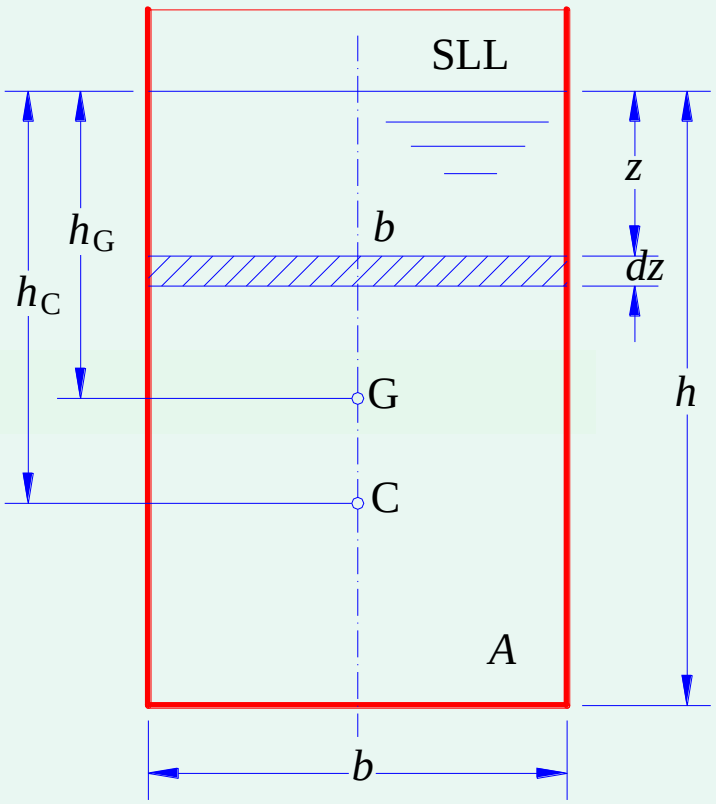
Sin aplicar las fórmulas

Fuerza

$$dF = p \cdot dA = \gamma \cdot z \cdot b \cdot dz$$

$$F = \gamma \cdot b \cdot \int_0^h z \cdot dz$$

$$\boxed{F = \gamma \cdot b \cdot \frac{h^2}{2}}$$



Centro de presiones C

$$h_C \cdot F = \int_0^h z \cdot dF$$

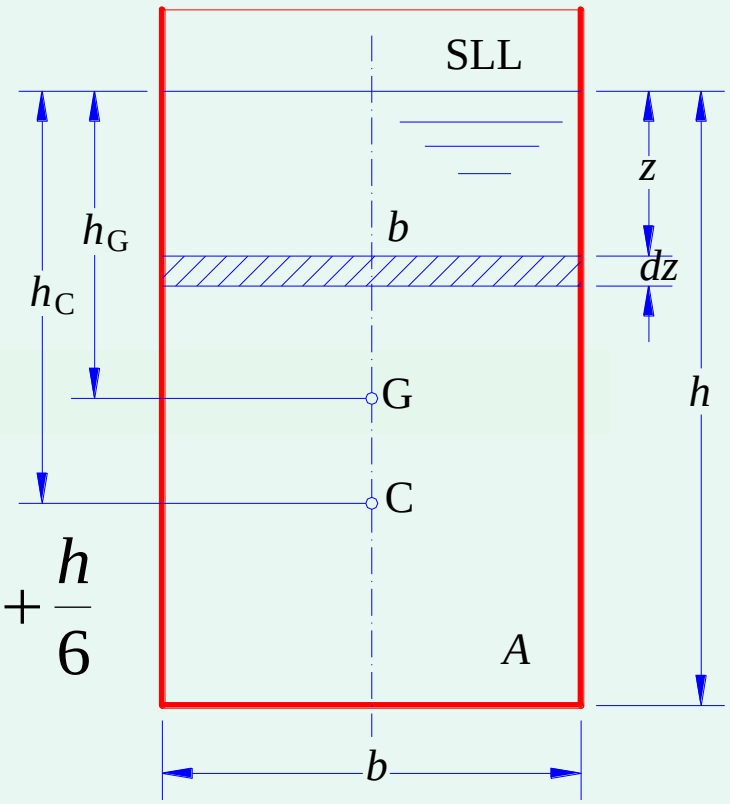
$$\gamma \cdot b \cdot \frac{h^2}{2} \cdot h_C = \int_0^h \gamma \cdot b \cdot z^2 \cdot dz = \gamma \cdot b \cdot \frac{h^3}{3}$$

$$\boxed{h_C = \frac{2}{3} \cdot h}$$

Aplicando las fórmulas

$$F = \gamma \cdot h_G \cdot A = \gamma \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot h$$

$$\boxed{F = \gamma \cdot b \cdot \frac{h^2}{2}}$$



$$h_C = h_G + \frac{I_g}{A \cdot h_G} = \frac{h}{2} + \frac{b \cdot h^3/12}{b \cdot h \cdot h/2} = \frac{h}{2} + \frac{h}{6}$$

$$\boxed{h_C = \frac{2}{3} \cdot h}$$

El ***centro de presiones*** está a **1/3** de la base sólo cuando el lado superior del rectángulo está en la SLL. Si está sumergido, cuanto más lo esté más se aproxima **C** a **G.**

Pared curva (generatrices paralelas)

Componente vertical

$$dF_v = p \cdot dA = \gamma \cdot z \cdot b \cdot dx$$

$$F_v = \gamma \cdot b \cdot \int_A^B z \cdot dx = \gamma \cdot b \cdot \int_A^B \text{área MM' N' N}$$

$$\boxed{F_v = \gamma \cdot b \cdot \text{área AA'B'B}}$$

fuerza de gravedad de la masa de líquido que queda sobre la superficie.

A veces es más fácil utilizar esta característica en superficies **planas** inclinadas.

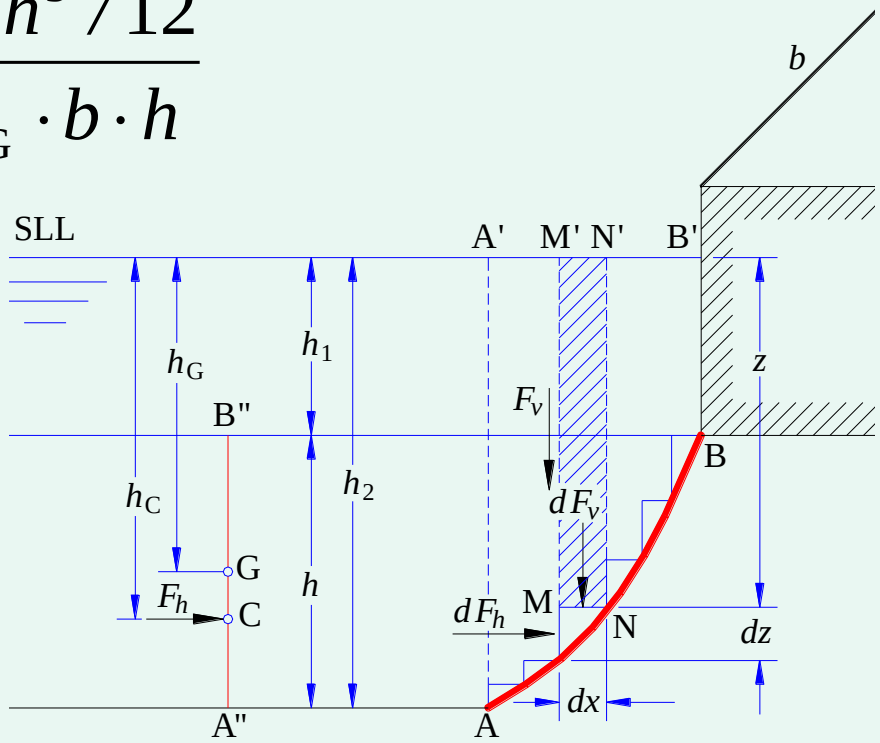
Componente horizontal

La componente horizontal F_h será la fuerza sobre el ***rectángulo* A"B"**, proyección de la pared **AB** sobre un plano vertical.

Punto de aplicación

$$h_C = h_G + \frac{I_g}{h_G \cdot A} = h_G + \frac{b \cdot h^3 / 12}{h_G \cdot b \cdot h}$$

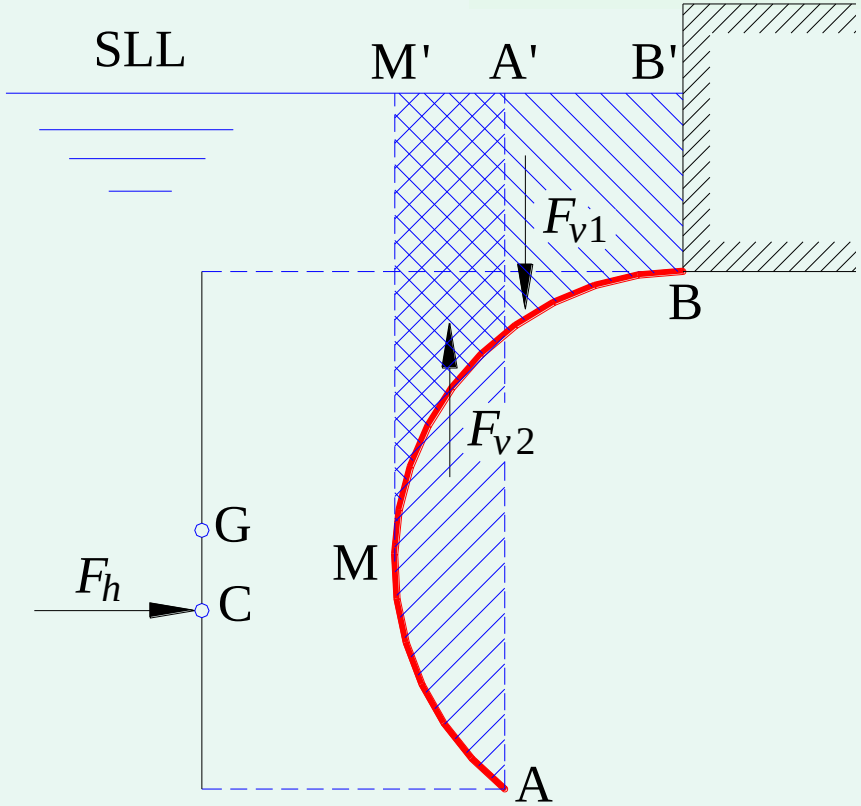
$$\boxed{h_C = h_G + \frac{h^2}{12 \cdot h_G}}$$



Si la pared curva fuese como la **AMB,** la componente vertical sobre **MA** sería ascendente:

$$F_v = F_{v1} - \left|F_{v2}\right|$$

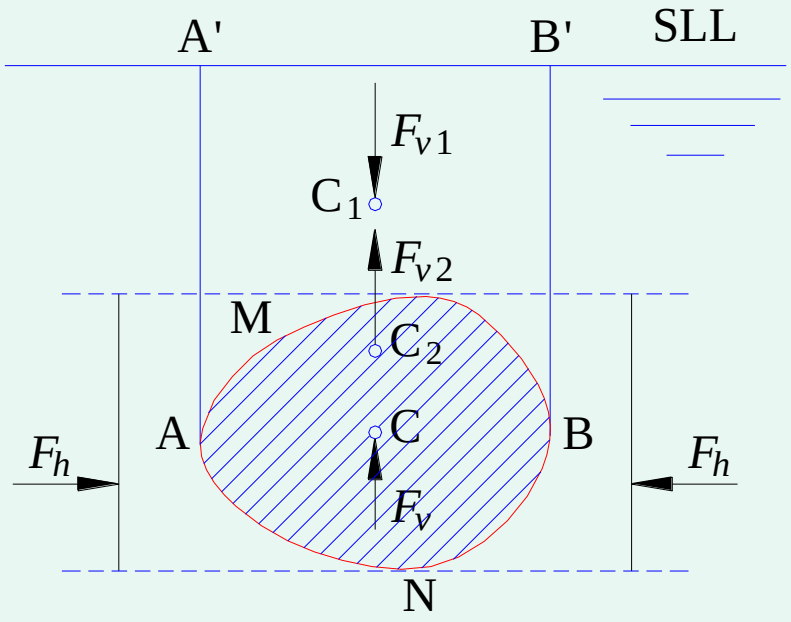
$$F_v = \gamma \cdot b \cdot (\text{área M'MBB'} - \text{área M'MAA'})$$



EJERCICIO

El principio de Arquímedes dice que ***todo cuerpo sumergido en un líquido sufre un empuje hacia arriba igual al peso del líquido que desplaza*****.** Comprobarlo basándose en el epígrafe anterior, y analizar la causa que origina dicho empuje.

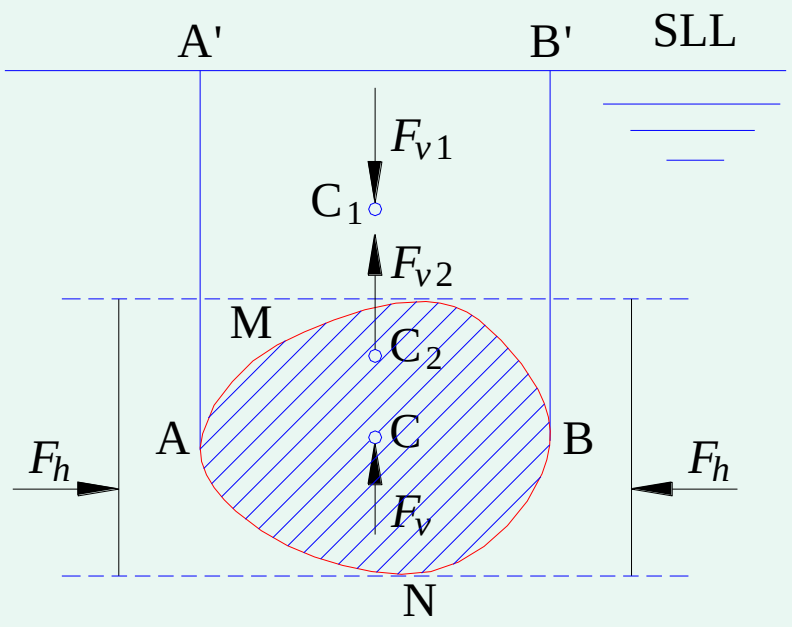
Solución

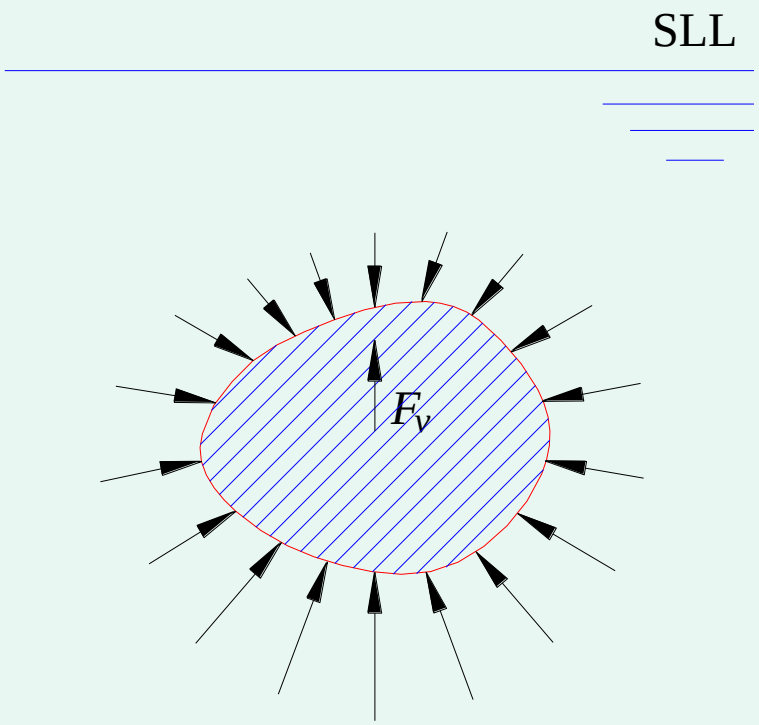


$$F_v = \gamma \cdot b \cdot \text{área A'ANBB'} - \gamma \cdot b \cdot \text{área A'AMBB'} =$$

$$= \gamma \cdot b \cdot \text{área AMBNA} = \gamma \cdot \text{volumen cuerpo} =$$

$$= \text{peso del líquido desplazado}$$





Presa de gravedad

Fuerzas del agua sobre la presa

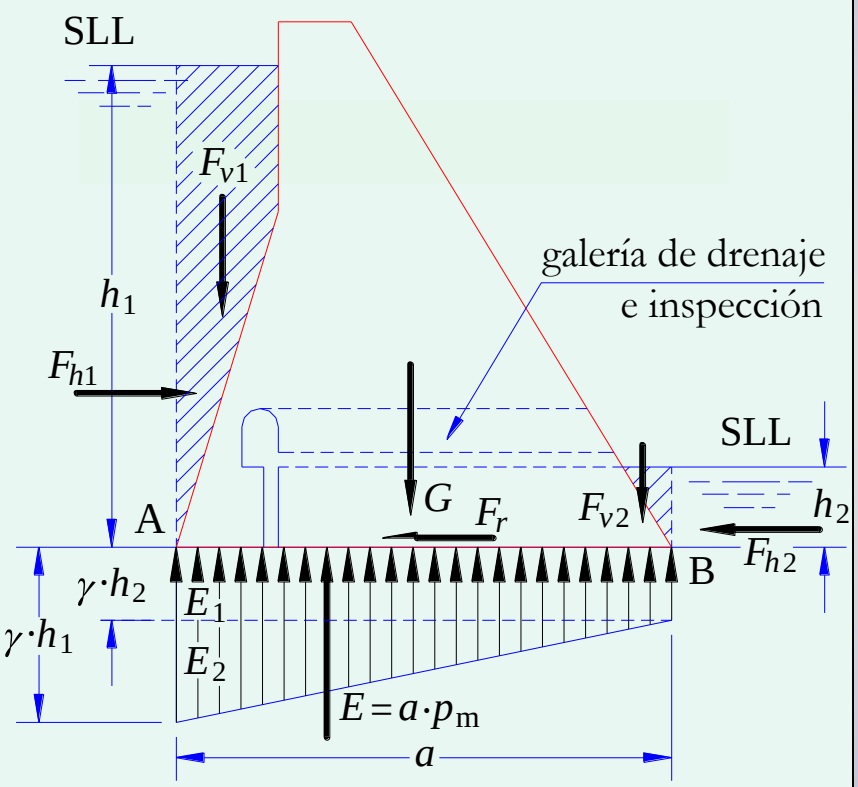
F_{h1}, F_{h2}, F_{v1}, F_{v2}, y además el empuje E:

$$E = a \cdot p_m = a \cdot \gamma \cdot h_m =$$

$$= a \cdot \gamma \cdot \frac{h_1 + h_2}{2}$$

$$E = E_1 + E_2 =$$

$$= a \cdot \gamma \cdot h_2 + a \cdot \gamma \cdot \frac{h_1 - h_2}{2}$$



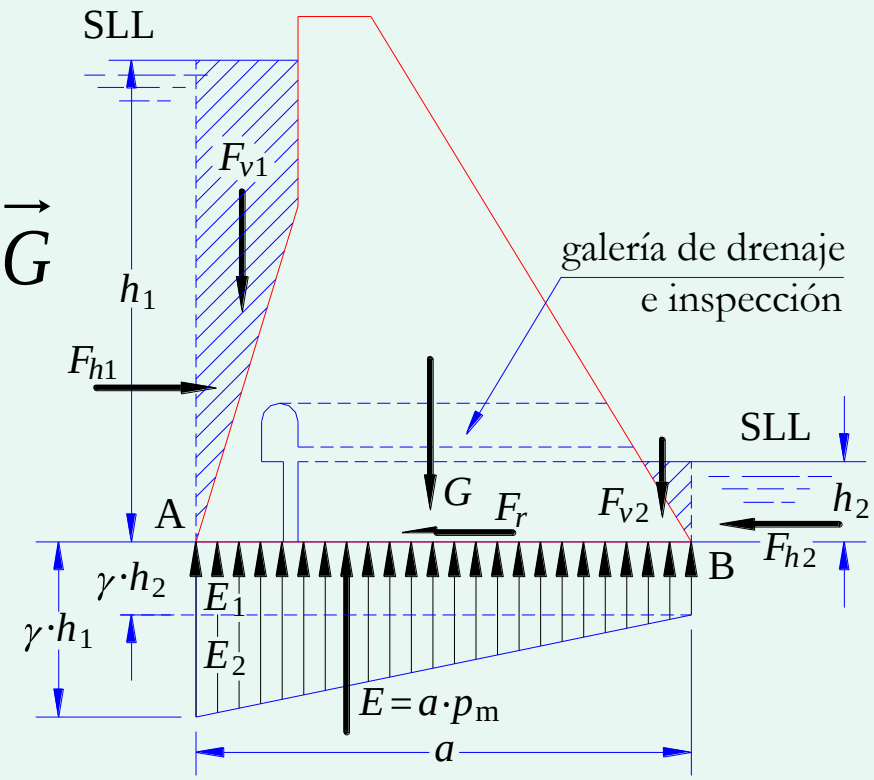
$$\boxed{E = a \cdot \gamma \cdot h_2 + k \cdot a \cdot \gamma \cdot \frac{h_1 - h_2}{2}}$$

Fuerza que contrarresta la acción del agua

El rozamiento de la presa sobre la base: fuerzas verticales multiplicadas por un ***coeficiente de fricción, μ***:

$$\boxed{F_r = \mu \cdot (G + F_{v1} + F_{v2} - E)}$$

$$\vec{R} = \vec{F}_{h1} + \vec{F}_{h2} + \vec{F}_{v1} + \vec{F}_{v2} + \vec{E} + \vec{G}$$

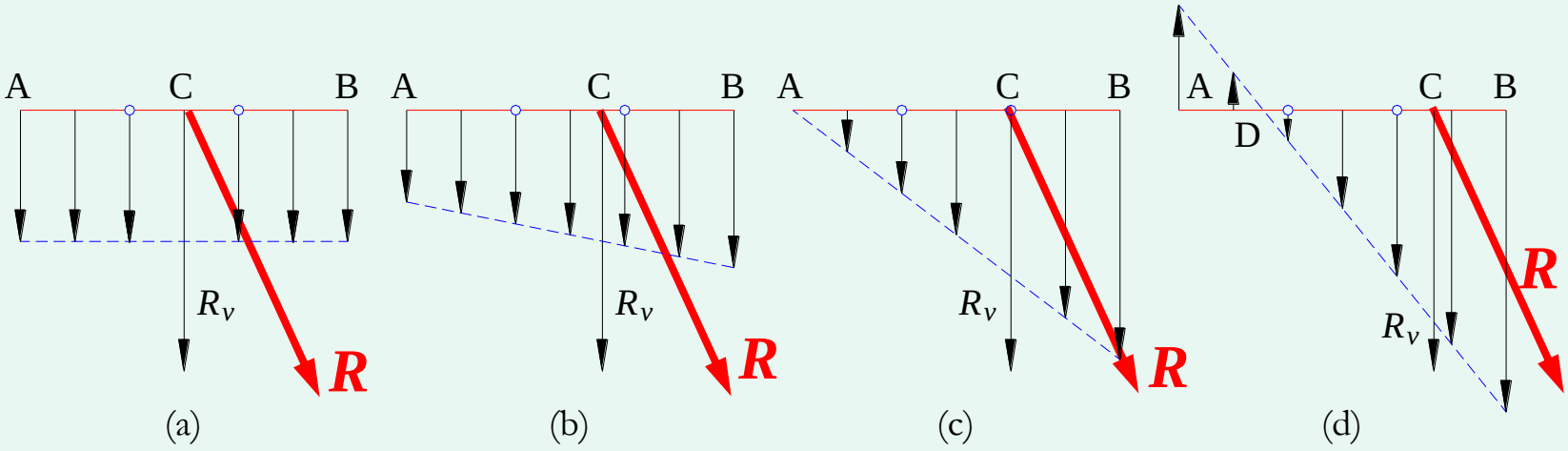


La fuerza ***F_r*** ha de ser mayor que la componente horizontal de ***R*** (***R_h***) para que la presa no deslice.

Posibilidad de vuelco

$$\vec{R} = \vec{F}_{h1} + \vec{F}_{h2} + \vec{F}_{v1} + \vec{F}_{v2} + \vec{E} + \vec{G}$$

ha de cortar a la base entre **A** y **B**, y más aún, en el tercio central de la misma y cuanto más centrado mejor. En efecto:



EJERCICIO

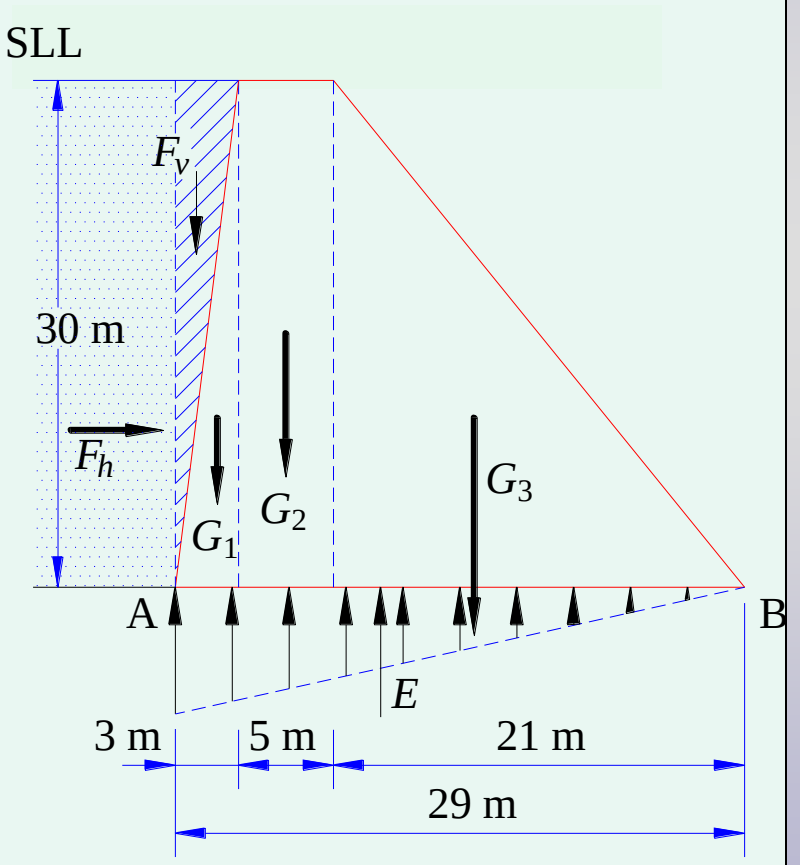
Estúdiese el deslizamiento y el vuelco de la presa de la figura.

Densidad del material: ρ_m = 2400 kg/m^3.

Coeficiente de rozamiento: μ = 0,4.

Coeficiente: k = 0,5.

Solución

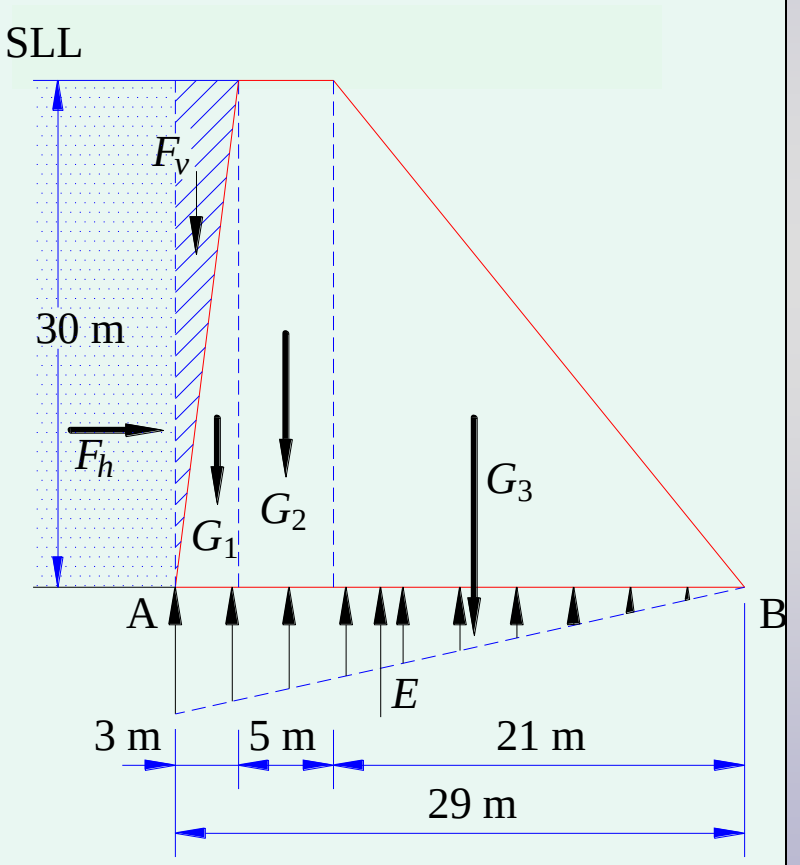


Fuerza de gravedad de la presa

$$G_1 = \gamma_m \cdot A_1 \cdot 1 = 9{,}81 \cdot 2400 \cdot 30 \cdot 3/2 =$$
$$= 1059{,}5 \cdot 10^3 \text{ N/m} = 1059{,}5 \text{ kN/m}$$

$$G_2 = \gamma_m \cdot A_2 \cdot 1 = 9{,}81 \cdot 2400 \cdot 30 \cdot 5 =$$
$$= 3531{,}6 \cdot 10^3 \text{ N/m} = 3531{,}6 \text{ kN/m}$$

$$G_3 = \gamma_m \cdot A_3 \cdot 1 = 9{,}81 \cdot 2400 \cdot 30 \cdot 21/2 =$$
$$= 7416{,}4 \cdot 10^3 \text{ N/m} = 7416{,}4 \text{ kN/m}$$

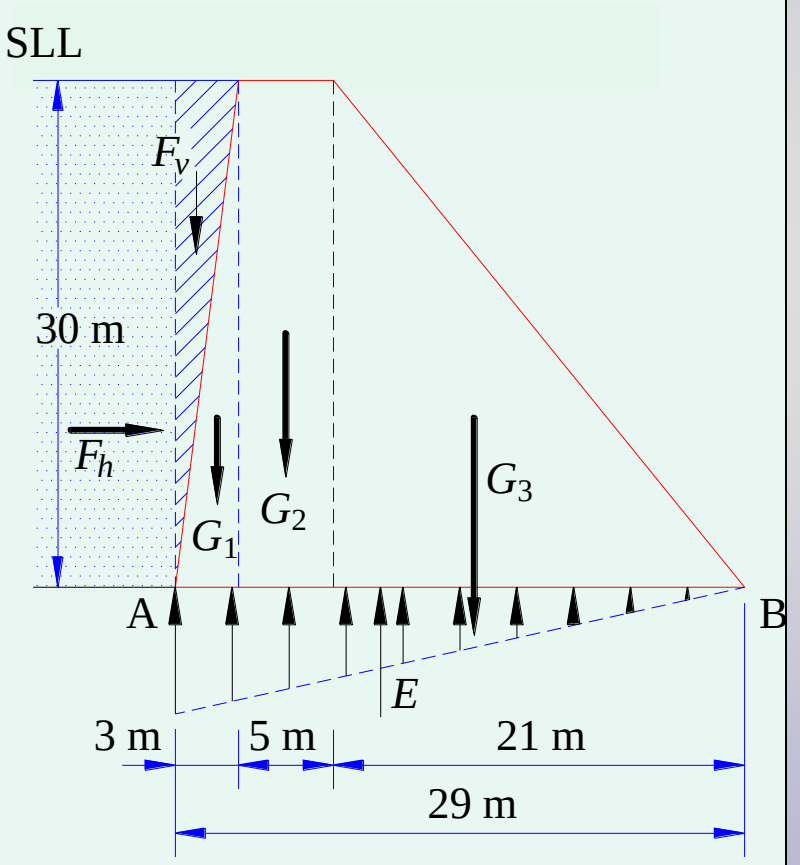


Empuje sobre la base

$$E = a \cdot \gamma \cdot h_2 + k \cdot a \cdot \gamma \cdot \frac{h_1 - h_2}{2} =$$

$$= 0{,}5 \cdot 29 \cdot 9{,}81 \cdot 1000 \cdot \frac{30}{2} =$$

$$= 2133{,}7 \text{ kN/m}$$



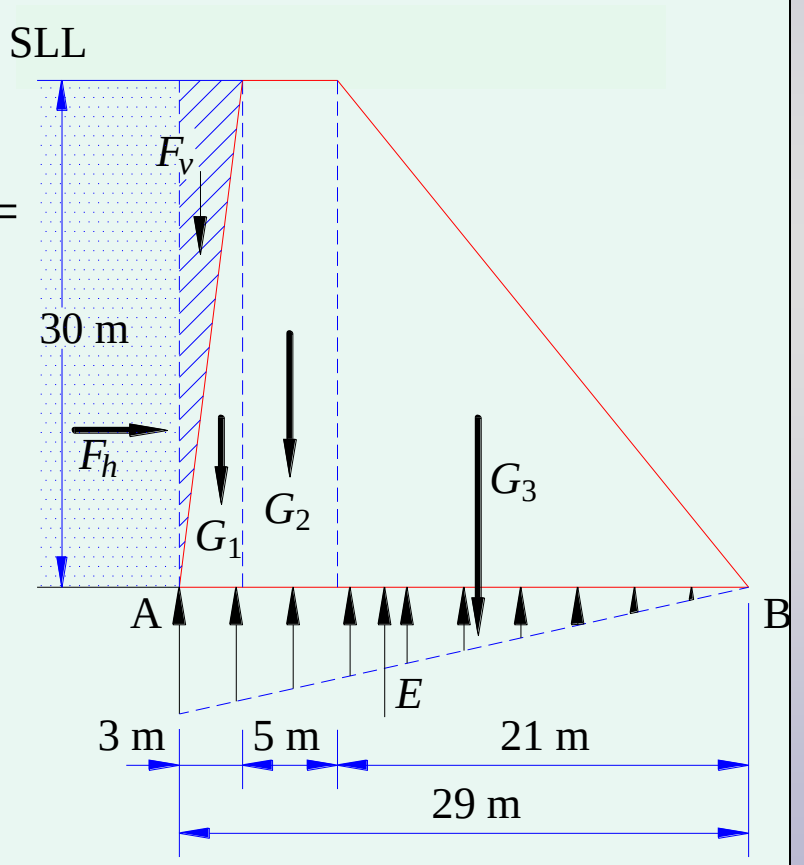
Fuerza del agua sobre la presa

$$F_h = \gamma \cdot h_G \cdot A = 9{,}81 \cdot 1000 \cdot 15 \cdot 30 \cdot 1 =$$

$$= 4414{,}5 \cdot 10^3 \text{ N/m} = 4414{,}5 \text{ kN/m}$$

$$F_v = \gamma \cdot b \cdot área = 9{,}81 \cdot 1000 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 30 / 2 =$$

$$= 441{,}5 \cdot 10^3 \text{ N/m} = 441{,}5 \text{ kN/m}$$

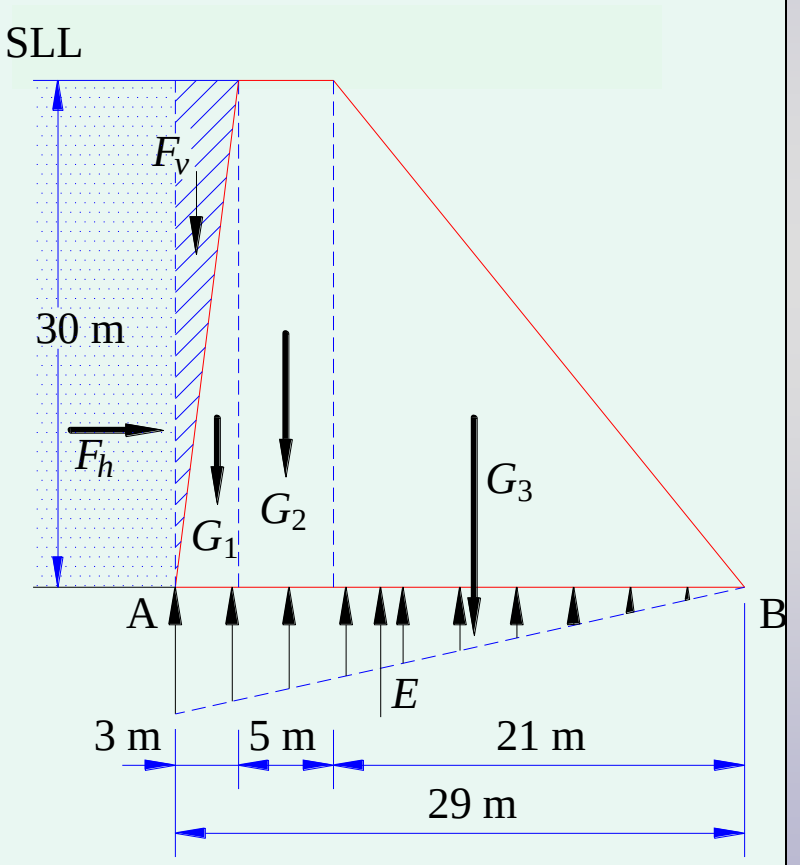


Fuerza de rozamiento de la presa

$$F_r = \mu \cdot (G + F_v - E) =$$

$$= 0{,}4 \cdot (12007{,}5 + 441{,}5 - 2133{,}7) = 4126{,}1\,\text{kN/m}$$

Al ser $F_r < F_h$, la presa deslizaría; habría que poner una cimentación adecuada para que esto no ocurra, o bien aumentar las dimensiones de la presa.



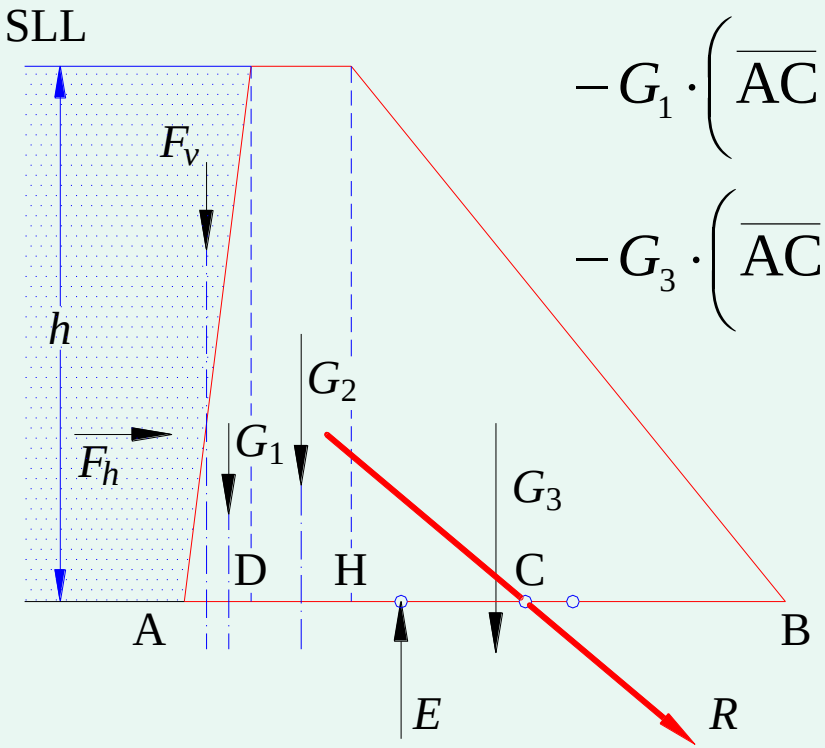
Estudio del vuelco

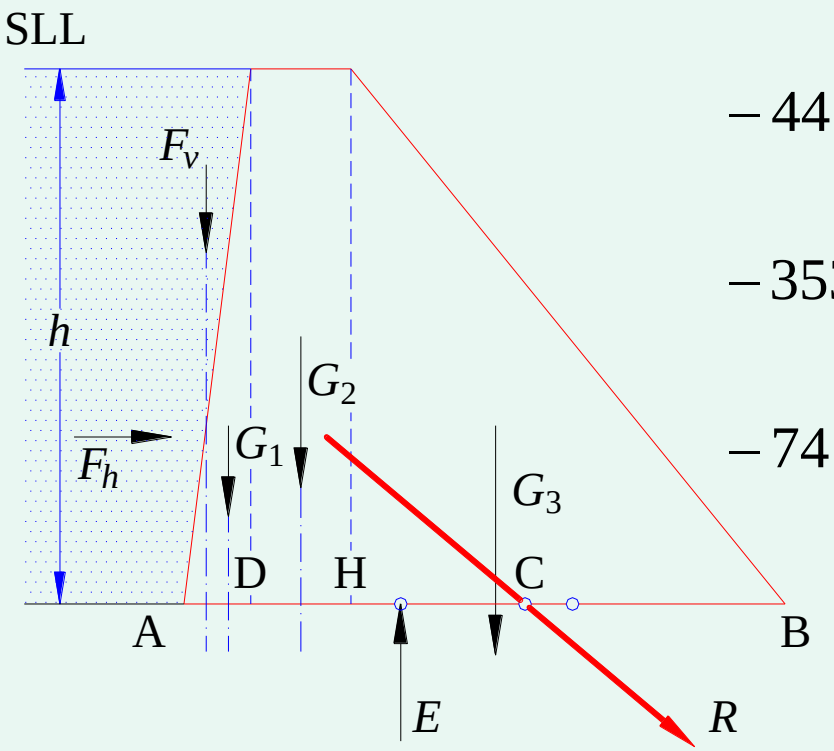
La suma de momentos respecto del punto **C**, por donde pasa la resultante ***R,*** ha de ser nula:

$$F_h \cdot \frac{h}{3} + E \cdot \left(\overline{\mathrm{AC}} - \frac{1}{3}\overline{\mathrm{AB}} \right) - F_v \cdot \left(\overline{\mathrm{AC}} - \frac{1}{3}\overline{\mathrm{AD}} \right) -$$

$$- G_1 \cdot \left(\overline{\mathrm{AC}} - \frac{2}{3}\overline{\mathrm{AD}} \right) - G_2 \cdot \left(\overline{\mathrm{AC}} - \overline{\mathrm{AD}} - \frac{1}{2}\overline{\mathrm{DH}} \right) -$$

$$- G_3 \cdot \left(\overline{\mathrm{AC}} - \overline{\mathrm{AH}} - \frac{1}{3}\overline{\mathrm{HB}} \right) = 0$$





$$4414{,}5\cdot\frac{30}{3}+2133{,}7\cdot\left(\overline{AC}-\frac{29}{3}\right)-$$

$$-441{,}5\cdot\left(\overline{AC}-\frac{3}{3}\right)-1059{,}5\cdot\left(\overline{AC}-\frac{2}{3}\cdot 3\right)-$$

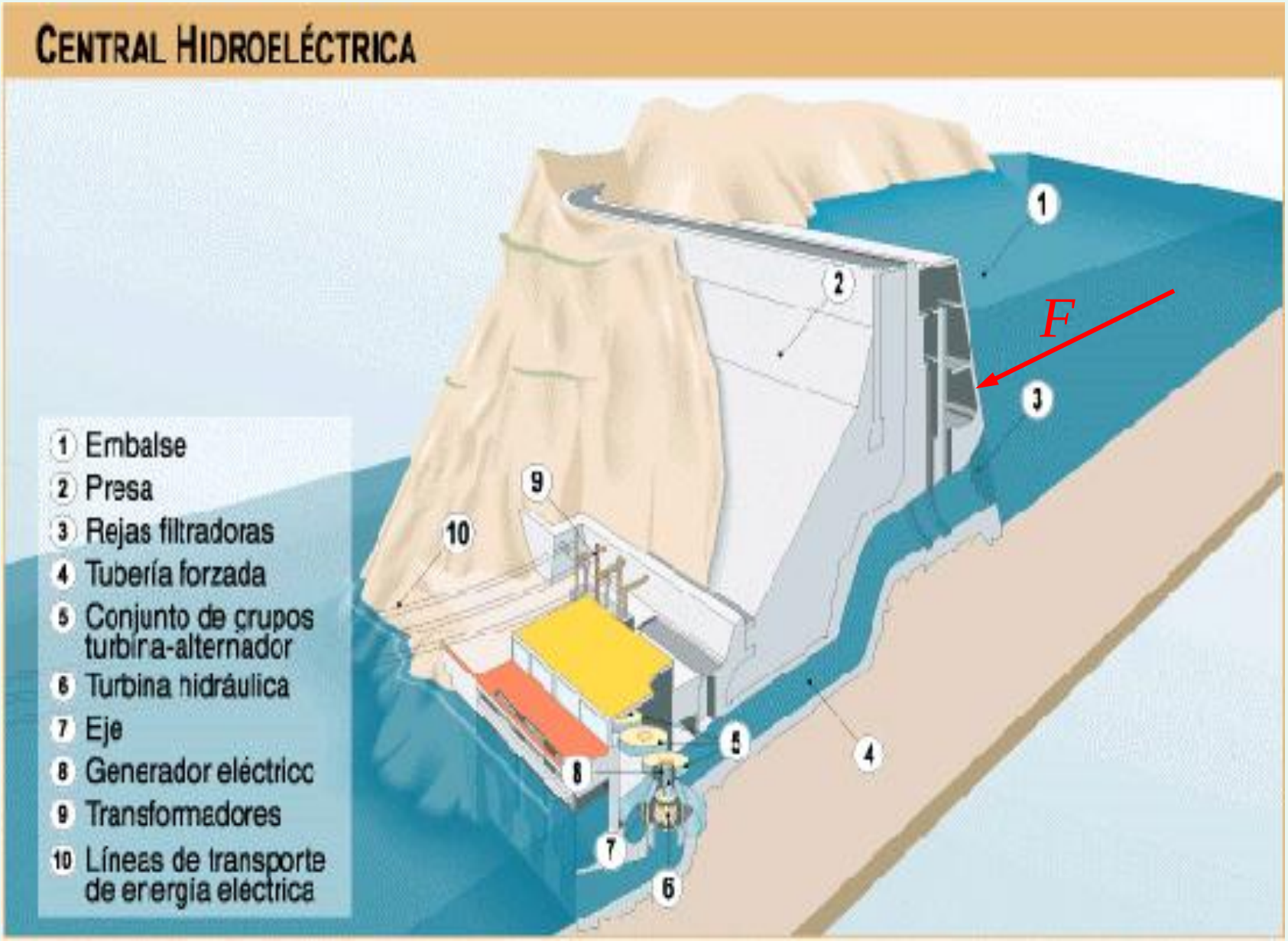
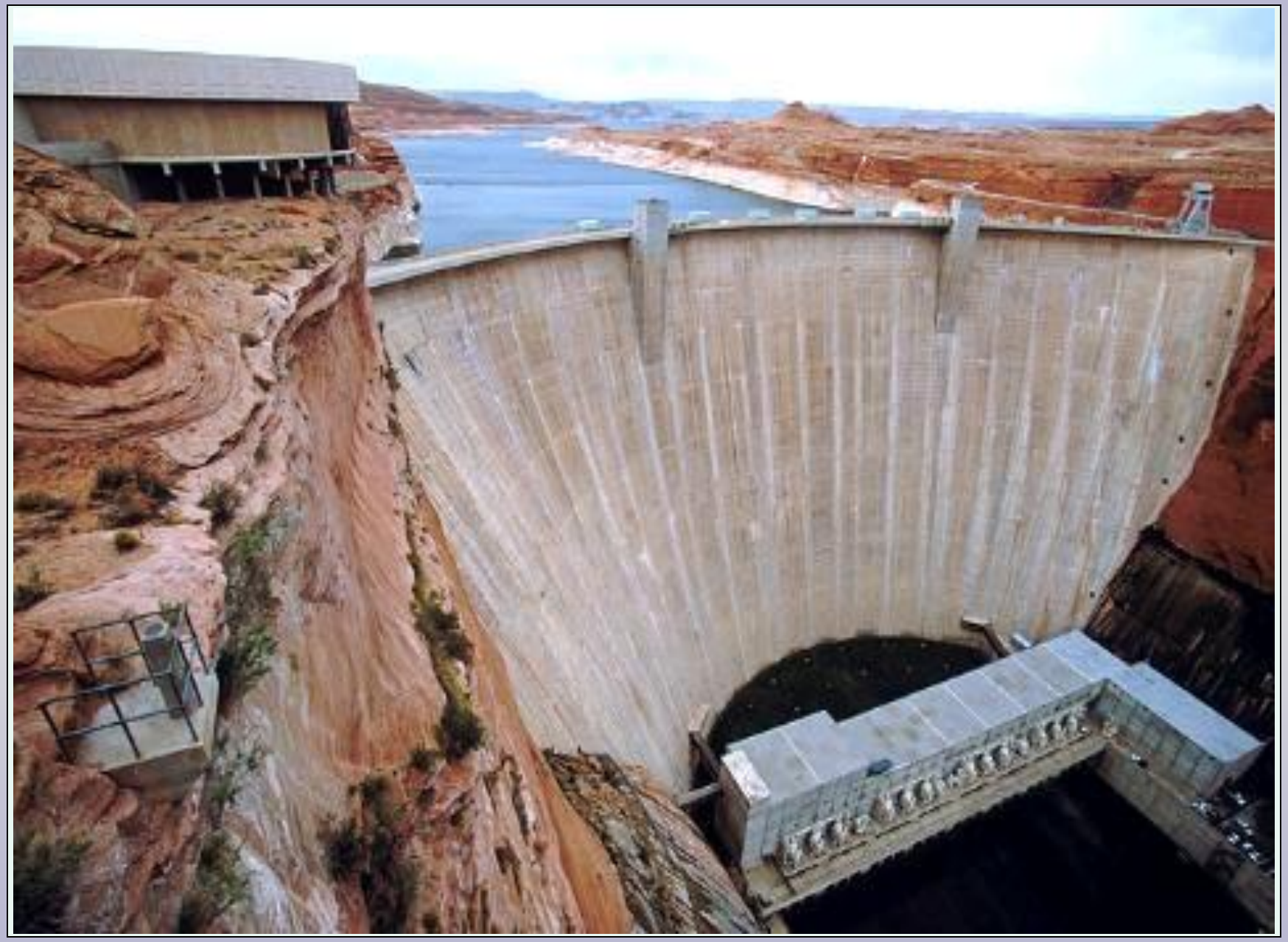
$$-3531{,}6\cdot\left(\overline{AC}-3-\frac{5}{2}\right)-$$

$$-7416{,}4\cdot\left(\overline{AC}-8-\frac{21}{3}\right)=0$$

$$10315{,}3\cdot\overline{AC}=156742$$

$$\overline{AC}=15{,}20\ \text{m}$$

Como $\overline{AB}=29\ \text{m}$, el punto **C** ha quedado casi en el centro, por lo que el reparto de esfuerzos sobre la base es bastante uniforme.


CENTRAL HIDROELÉCTRICA
1 Embalse
2 Presa
3 Rejas filtradoras
4 Tubería forzada
5 Conjunto de grupos turbina-alternador
6 Turbina hidráulica
7 Eje
8 Generador eléctrico
9 Transformadores
10 Líneas de transporte de energía eléctrica
F

F