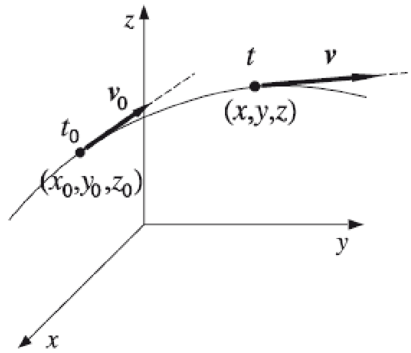
Tema 17.- Dinámica de los fluidos

§17.1.- Descripción del movimiento de los fluidos.

17.1.a. Método de Lagrange.

- Considerar elementos infinitesimales de volumen, asimilables al concepto de *partícula*, y que llamaremos ***partículas fluidas***
- Seguir el movimiento de cada una de esas partículas fluidas.
- Asignar coordenadas (x,y,z) a cada una de las partículas fluidas y especificar dichas coordenadas en función del tiempo t.



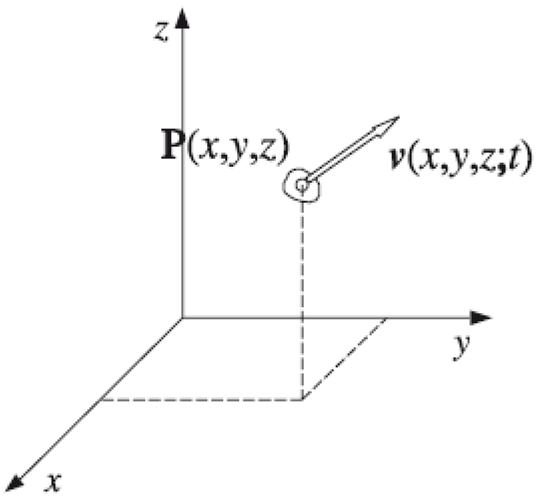
Para una partícula fluida que se encontrase en (x_0,y_0,z_0) en el instante t_0, las coordenadas (x,y,z) en un instante t quedarán determinadas por medio de las funciones

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = x(x_0,y_0,z_0,t) \\ y = y(x_0,y_0,z_0,t) \\ z = z(x_0,y_0,z_0,t) \end{cases}$$

Este procedimiento es una generalización inmediata de los conceptos de la mecánica de las partículas y, aunque debido inicialmente a Euler, fue desarrollado y aplicado por Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

17.1.b. Método de Euler

- Nos interesaremos por lo **que está ocurriendo en un cierto punto del espacio y en un cierto instante** de tiempo, en lugar de preocuparnos por lo que le ocurra a una determinada partícula fluida.
- Deberemos especificar la **densidad y la velocidad del fluido** en cada punto del espacio y en cada instante de tiempo.
    - Describiremos el movimiento del fluido especificando la densidad $\rho(x,y,z;t)$ y el vector velocidad $v(x,y,z;t)$ en el punto de coordenadas (x,y,z) y en el instante t.
    - Cualquier magnitud física que utilicemos para describir el estado del fluido (*v.g.*, la presión p) tendrá un valor en cada punto del espacio y en cada instante de tiempo, de modo que será una función de x, y, z y t (*v.g.*, $p=p(x,y,z;t)$).



Este procedimiento, desarrollado por Leonhard Euler (1707- 1783), es el que seguiremos.

17.1.c. Método de Euler. Campo de velocidades.

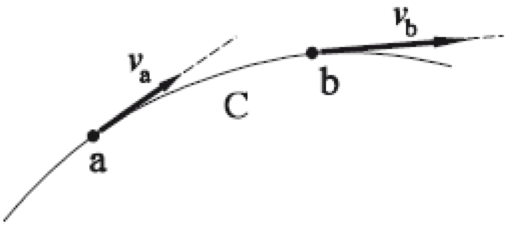
- Asignamos a cada punto del espacio ocupado por el fluido un vector velocidad que es función de las coordenadas del punto y del tiempo, esto es, $v = v(x, y, z; t)$
- Queda definido un campo de velocidades, que es un campo vectorial.
- A partir de las propiedades de dicho campo vectorial, obtendremos las propiedades del flujo.

Régimen de **flujo *no-uniforme y no-estacionario (variable)*.** En general, las velocidades de las partículas fluidas en dos puntos cualesquiera del espacio son diferentes en un mismo instante; y también lo son para las partículas fluidas al pasar por un punto dado en distintos instantes de tiempo.

Régimen de **flujo *estacionario o permanente*:** cuando la velocidad en un punto cualquiera permanece constante al transcurrir el tiempo; *i.e.*, la velocidad de las partículas fluidas al pasar por un punto dado es siempre la misma. La condición de régimen estacionario significa que la velocidad de las partículas fluidas es tan sólo función de sus coordenadas espaciales y no del tiempo; *i.e.*, **v=v(*x,y,z*).**

Régimen de **flujo *uniforme***: cuando la velocidad de las partículas fluidas es la misma en todos los puntos del espacio, aun cuando pueda cambiar en el transcurso del tiempo, decimos que el entonces, el campo de velocidades no es función de las coordenadas espaciales, sino solamente del tiempo, *i.e.*, **v=v(*t*).**

17.1.d. Líneas de corriente.



El campo vectorial de velocidades admite una representación gráfica mediante las llamadas *líneas vectoriales*, que ahora reciben el nombre de ***líneas de corriente***.

- Una línea de corriente es tangente en cualquiera de sus puntos a la dirección de la velocidad de la partícula fluida que pasa por ese punto.
- Las líneas de corriente satisfacen la ecuación vectorial

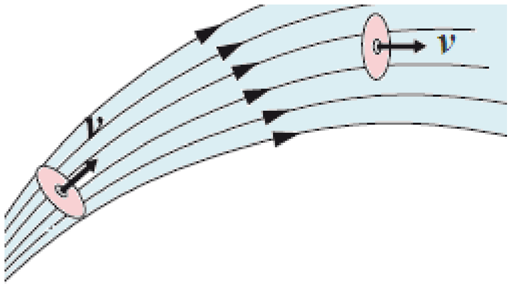
$$\mathbf{v} \times \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$$

donde $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}x\,\mathbf{i} + \mathrm{d}y\,\mathbf{j} + \mathrm{d}z\,\mathbf{k}$ representa un desplazamiento elemental a lo largo de la línea de corriente.

- Las ecuaciones diferenciales de la familia de líneas de corriente son:

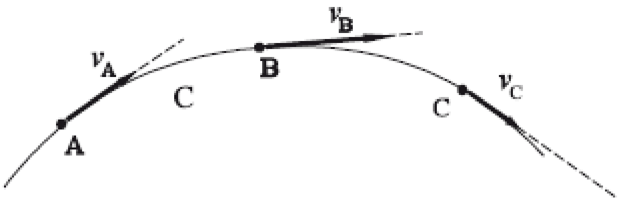
$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x} = \frac{\mathrm{d}y}{v_y} = \frac{\mathrm{d}z}{v_z}$$

- Espaciamos las líneas de corriente de modo que el número de ellas que atraviesan la unidad de área normal a su dirección sea proporcional al valor de la velocidad de las partículas fluidas en los puntos de dicha superficie unitaria.
- Con este convenio obtenemos un "***mapa***" de líneas de corriente que es muy útil para **analizar**, al menos **cualitativamente**, el movimiento del fluido.



- En las zonas en que las líneas de corriente están muy apretadas, la velocidad será grande; en las que están muy separadas, será pequeña.
- Una propiedad inmediata de las líneas de corriente es que no pueden cruzarse; de no ser así, no quedaría unívocamente determinada la velocidad de la partícula fluida en cada instante y en cada punto del espacio.

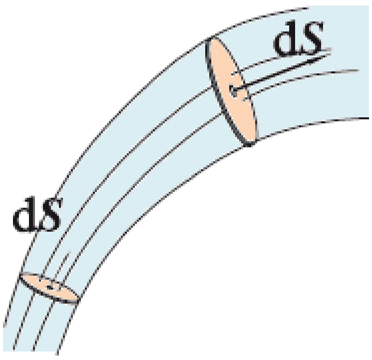
En el ***régimen de flujo estacionario***, el patrón de líneas de corriente permanece inalterado en el transcurso del tiempo. Consideremos un punto *A* situado sobre una línea de corriente. Puesto que ***v*** no cambia al transcurrir el tiempo, toda partícula que llegue al punto A pasará por él con la misma velocidad (en módulo, dirección y sentido) que las que le precedieron. Lo mismo ocurrirá en los puntos B, C,... Por consiguiente, si trazamos la trayectoria de una partícula que pasó por el punto A, esa será la trayectoria de todas las partículas que lleguen al punto A. Esta trayectoria define una línea de corriente.



En el ***régimen de flujo no-estacionario***, el patrón de líneas de corriente puede cambiar en el transcurso del tiempo, y las trayectorias de las partículas no coinciden, en general, con las líneas de corriente en un instante dado. Las trayectorias y las líneas de corriente se tocan en un punto, localizando la partícula en el instante en cuestión.

El conjunto de líneas de corriente que, en un instante dado, pasan por el contorno de un elemento infinitesimal de superficie (d*S*) definen un ***tubo de corriente***.

- No pasa fluido a través de las paredes laterales de un tubo de corriente.
- No podrán mezclarse los fluidos de diferentes tubos de corriente.
- Se comporta como un conducto de paredes impermeables, espesor nulo y sección recta infinitesimal.

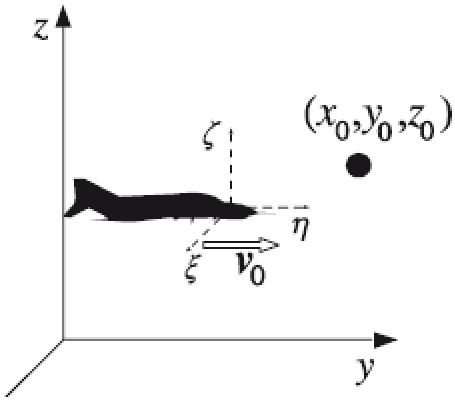


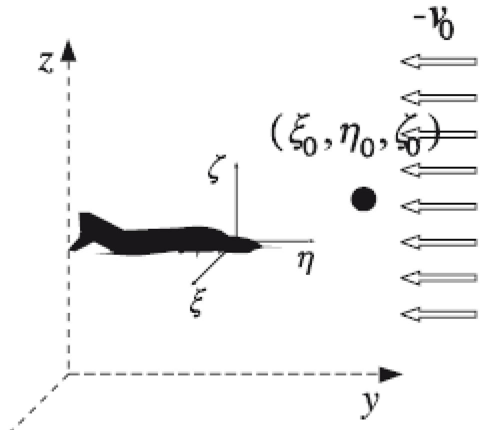
Un número infinito de tubos de corriente adyacentes, que dan lugar a un tubo de corriente de sección recta finita, recibe el nombre de ***vena fluida***.

§17.2.- Regímenes de flujo.

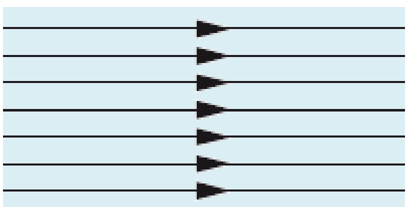
(a) Flujo estacionario y flujo no-estacionario.- Como ya hemos visto anteriormente, cuando las propiedades y características del flujo, en cada punto del espacio, permanecen invariables en el transcurso del tiempo, el flujo se llama *estacionario o permanente*; en caso contrario, se llama *no estacionario o variable*. El campo de velocidades en un flujo estacionario es función solamente de las coordenadas espaciales (x,y,z), no siéndolo del tiempo t; esto es, $v(x,y,z)$.

Sólo en el régimen de flujo estacionario coinciden las líneas de corriente con las trayectorias seguidas por las partículas fluidas. Las condiciones de flujo estacionario se consiguen generalmente cuando las velocidades de flujo son pequeñas.





En ocasiones, es posible obtener un flujo estacionario a partir de otro no-estacionario por un simple cambio del referencial. Así, por ejemplo, para un avión en vuelo, el flujo no es estacionario en absoluto si empleamos un referencial ligado a tierra (figura izq.). Sin embargo, si el avión está volando con velocidad constante v_0 y empleamos un referencial solidario al avión (figura dcha.), el flujo del aire en ese referencial, en el que el avión está en reposo, será (aproximadamente) estacionario.



(b) Flujo uniforme y flujo no-uniforme.- Cuando la velocidad de las partículas fluidas es la misma, en cada instante, en todos los puntos del espacio ocupado por el fluido, decimos que el flujo es *uniforme*; en caso contrario, sería *no-uniforme*. En el régimen de flujo uniforme, el patrón de líneas de corriente está constituido, en cada instante, por líneas rectas, paralelas e igualmente espaciadas.

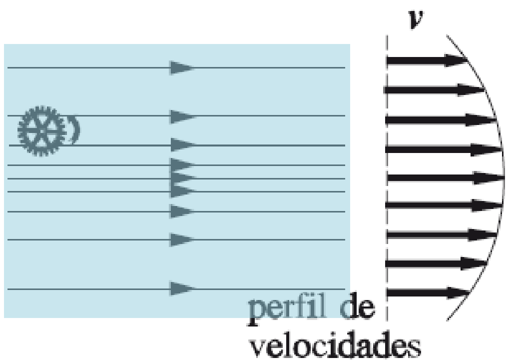
(c) Flujo compresible y flujo incompresible.- En el régimen de flujo *incompresible* se supone que la densidad del fluido es constante, *i.e.*, independiente de las coordenadas espaciales y del tiempo, simplificándose así extraordinariamente el análisis del movimiento. En caso contrario, el flujo es *compresible*.

Ordinariamente, podemos considerar que los **líquidos** presentan regímenes de flujo incompresibles; sólo en situaciones tales como la propagación del sonido en líquidos es necesario tener en cuenta la compresibilidad de éstos. Pero hasta los **gases**, que son altamente compresibles, pueden experimentar cambios tan poco importantes en su densidad que su flujo pueda considerarse como incompresible; este es el caso de la *aerodinámica subsónica*, donde el aire se considera incompresible.

(d) Flujo laminar y flujo turbulento.- Utilizamos el término de *flujo laminar* para indicar que el fluido fluye en láminas o capas, en oposición al de *flujo turbulento*, cuando la velocidad en cada punto presenta fluctuaciones macroscópicas al azar que se imponen sobre sus valores medios. El flujo laminar es un flujo ***bien ordenado***, en el que las capas fluidas deslizan unas respecto a otras, sin entremezclarse; *v.g.*, la miel espesa que se vierte de un tarro. En el flujo turbulento ocurre lo contrario. El que el flujo sea laminar o turbulento queda determinado por su **velocidad** y por la **configuración** y **tamaño** del conducto. A medida que aumenta la velocidad, se produce una transición del régimen laminar al turbulento.

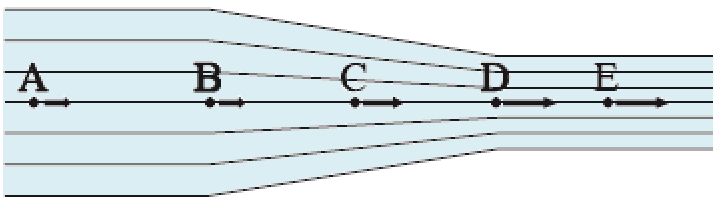
Un ejemplo sencillo de esta transición lo tenemos si observamos el humo que se eleva de un cigarrillo. Durante un cierto tramo, el humo asciende en régimen laminar; después, casi bruscamente, el régimen se convierte en turbulento y el humo se dispersa.

(e) Flujo irrotacional y flujo rotacional.- Decimos que el flujo es *irrotacional* cuando cualquier partícula fluida no posee velocidad angular neta respecto al punto en que se encuentra. En caso contrario, el flujo es *rotacional*.



Podemos tener una aproximación intuitiva a estos dos tipos de flujo imaginando una ruedecilla con paletas inmersa en el fluido en movimiento. Si la ruedecilla tan sólo se traslada, el flujo es irrotacional; si gira y se traslada (o sólo gira), el flujo es rotacional. El flujo rotacional incluye el movimiento de *vórtice* (remolinos) y los flujos con gradiente transversal de velocidad.

(f) Flujos uni y bidimensional.- El flujo *unidimensional* representa una simplificación en la que se supone que las características y propiedades del flujo son expresables en función de una sola coordenada espacial y del tiempo.



Generalmente, la coordenada espacial se toma a lo largo de una línea de corriente o conducto. La suposición de flujo unidimensional en un conducto exige que todas las magnitudes físicas de interés (velocidad, presión,...) tengan un valor constante, en un instante dado, en todos los puntos de una sección recta cualquiera del conducto. En realidad, esta condición nunca se cumple rigurosamente. Sin embargo, si las diferencias no son muy grandes, o si sólo interesan los efectos medios en cada sección recta, puede suponerse la existencia de un flujo unidimensional. De forma análoga se define el flujo bidimensional.

(g) Flujo interno y flujo externo.- El flujo *interno* es aquél en el que el fluido fluye **confinado** dentro de una estructura, como el que se produce en el interior de tuberías y canales. El flujo *externo* es el de un fluido **alrededor** de un objeto, como el que tiene lugar alrededor de un perfil de ala de avión, de un cohete, de un submarino,...

(h) Flujo viscoso y flujo no-viscoso.- La viscosidad representa la fricción entre las diferentes capas fluidas que se mueven con distintas velocidades. La viscosidad introduce fuerzas tangenciales entre las capas fluidas en movimiento relativo y da lugar a la pérdida de energía mecánica. En muchos casos la viscosidad juega un papel importante en el movimiento del fluido (*flujo viscoso*); en otros casos, sus efectos son irrelevantes (*flujo no-viscoso*).

17.2.a. Fluidos ideales.

La dinámica de los fluidos reales es un tema matemática y físicamente muy complejo.

Resulta conveniente introducir ciertas hipótesis simplificativas.

En los **fluidos ideales** suponemos que no existen esfuerzos cortantes, incluso cuando están en movimiento, de modo que las fuerzas superficiales sobre un elemento de fluido son debidas exclusivamente a la presión.

Por definición, los fluidos no soportan esfuerzos cortantes cuando están en equilibrio; pero todos los fluidos poseen cierta viscosidad, que introduce esfuerzos cortantes entre las capas fluidas adyacentes en movimiento relativo. **Los fluidos ideales no poseen viscosidad.**

Evidentemente, no encontraremos fluidos ideales en la Naturaleza; el fluido ideal no es más que una hipótesis de trabajo simplificadora.

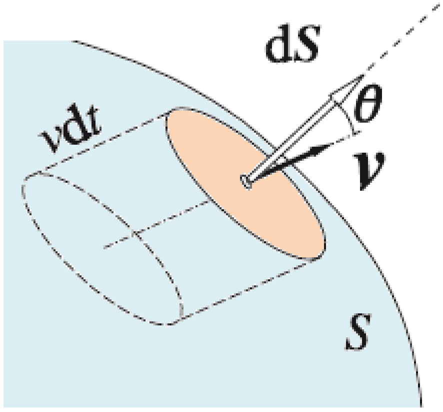
En muchos fluidos la viscosidad es muy pequeña (agua, aire,...), de modo que el análisis restringido de la dinámica de los fluidos a los fluidos ideales tendrá una amplia aplicación práctica; si acaso, tras introducir las correcciones empíricas apropiadas.

§17.3.- Flujo y caudal.

Ritmo con el que fluye la masa a través de una superficie S fija en el espacio.

- El ***flujo másico***, o simplemente ***flujo***, a través de una superficie S, fija en el espacio representa la masa de fluido que pasa a través de la superficie S en la unidad de tiempo.
- Sus **unidades** son **kg/s, g/s**,... u otras equivalentes

Durante un intervalo de tiempo infinitesimal dt, la masa de fluido que pasa a través de dS será la contenida en el cilindro oblicuo de arista v¡Error! Marcador no definido.dt, paralela a la dirección de v. El volumen de dicho cilindro es $\mathrm{d}V = v\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S\cos\theta = (\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S})\mathrm{d}t$ y la masa contenida en él es $\mathrm{d}m = \rho\mathrm{d}V = \rho(\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S})\mathrm{d}t$, de modo que



$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \rho\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \quad \rightarrow \quad \Phi = \int_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

Obsérvese que ρv, que es la densidad de cantidad de movimiento, representa también la densidad de flujo, ya que su componente en cualquier dirección del espacio nos indica el ritmo a que fluye la masa por unidad de área en dicha dirección.

- El ***flujo volúmico o caudal*** a través de una superficie S, fija en el espacio, representa el volumen de fluido que pasa a través de dicha superficie en la unidad de tiempo.
- Sus **unidades son m^3/s, cm^3/s**,... u otras equivalentes
- Se define por

$$\mathrm{d}Q = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \quad \rightarrow \quad Q = \int_S \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

En un régimen de **flujo incompresible** (ρ=cte), existe una relación sencilla entre el flujo y el caudal:

$$\Phi = \rho\int_S \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \rho Q$$

El flujo a través de una **superficie fija y cerrada** S, que delimita un volumen V, vendrá dado por

$$\Phi = \oint_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \qquad \begin{cases} > 0 & \textit{saliente} \rightarrow \text{fuentes (¿vaciado?)} \\ < 0 & \textit{entrante} \rightarrow \text{sumideros (¿acumulación?)} \\ = 0 & \text{nada o compensados} \end{cases}$$

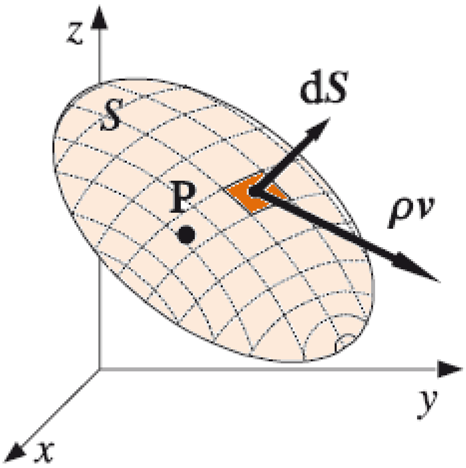
De la definición de divergencia de un campo vectorial se sigue que

$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_S(\rho\mathbf{v})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

de modo que $\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})$ en un punto del espacio representa el flujo de masa, por unidad de volumen, que pasa a través de una superficie que encierra al punto, cuando dicha superficie se va "deshinchando", encerrando siempre al punto, hasta confundirse con él.

§17.4.- Ecuación de continuidad.

17.4.a. Flujo genérico (estudio avanzado)



¡Error! Marcador no definido.Consideremos de nuevo una superficie cerrada S, fija respecto a un sistema coordenado (x,y,z) que delimita un volumen V y que está inmersa en un flujo $v(x,y,z;t)$ de un fluido de densidad $\rho(x,y,z;t)$. La expresión [¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..¡Error! Marcador no definido.] **nos permite calcular el flujo de masa a través de dicha superficie.**

Por otra parte, la masa de fluido que hay en un instante dado en el interior de la superficie S es

$$m=\int_V\rho\,\mathrm{d}V$$

de modo que la variación de masa, por unidad de tiempo, en el interior de la superficie S es

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\rho\,\mathrm{d}V=\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V$$

La ecuación de continuidad debe ser la expresión del principio de conservación de la masa fluida (en ausencia de manantiales y sumideros). Esto quiere decir que el flujo de masa que pasa a través de la superficie cerrada S debe ser igual a la disminución, por unidad de tiempo, de la masa de fluido contenida en su interior. Esto es,

$$\oint_S\rho\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\rho\,\mathrm{d}V$$

que es la forma integral de la *ecuación de continuidad*.

Si ahora aplicamos el teorema de la divergencia de Gauss al primer miembro de la expresión anterior, tendremos

$$\oint_S\rho\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\int_V\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})\mathrm{d}V=-\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V$$

y como ambas integrales están referidas al mismo volumen V,

$$\int_V \left[\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) - \frac{\partial\rho}{\partial t}\right]\mathrm{d}V = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) - \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

por ser V un volumen arbitrario, se sigue la forma diferencial de la ecuación de continuidad en cualquier punto del espacio ocupado por el flujo.

El significado físico de los dos términos en la expresión anterior es el siguiente:

- $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$ representa la **variación de masa** por unidad de volumen y de tiempo en un volumen elemental que contiene a un punto fijo en sistema coordenado.
- $\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})$ representa la masa que sale por unidad de volumen y de tiempo a través de la superficie de dicho volumen elemental.

Para un régimen de **flujo estacionario** será $\partial\rho/\partial t=0$, de modo que la ecuación de continuidad se transforma en

$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0$$

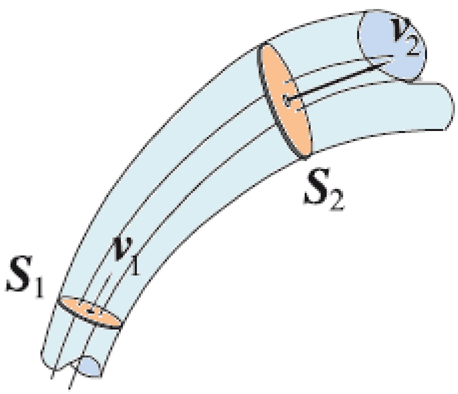
y para un **flujo incompresible** (ρ=cte.) tendremos

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$$

expresión válida aunque el flujo incompresible sea no-estacionario.

17.4.b. Tubo de corriente.-

Consideremos un régimen de flujo estacionario y apliquemos la ecuación de continuidad, en su forma integral [31.24], a una porción de tubo de corriente comprendida entre dos secciones rectas fijas, d$\boldsymbol{S}_1$ y d$\boldsymbol{S}_2$. Sean $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ las velocidades y ρ_1 y ρ_2 las densidades del fluido en esas secciones rectas. Como el tubo de corriente se comporta como un conducto impermeable, de modo que no hay flujo a través de sus paredes laterales, tendremos que



$$\oint_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = -\rho_1 v_1 \mathrm{d}S_1 + \rho_2 v_2 \mathrm{d}S_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \rho_1 v_1 \mathrm{d}S_1 = \rho_2 v_2 \mathrm{d}S_2$$

La expresión ρvdS representa el flujo a través de una sección recta del tubo; dicho flujo es constante a todo lo largo de un tubo de corriente.

Si el régimen de flujo es estacionario e incompresible, entonces la expresión [31.31] se reduce a

$$v_1 \mathrm{d}S_1 = v_2 \mathrm{d}S_2$$

que expresa la constancia del caudal a través de todas las secciones rectas de un tubo de corriente.

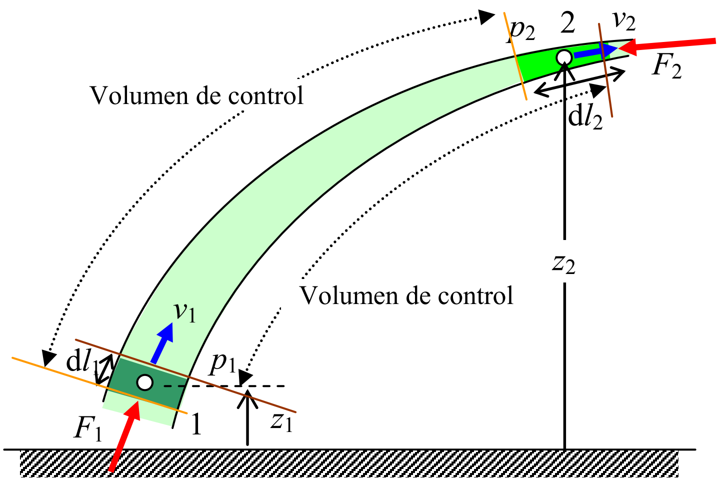
Si consideramos un tubo de corriente de sección recta finita (*vena fluida*), y suponemos un régimen de flujo unidimensional, además de estacionario, las expresiones [31.31] y [31.32] se escriben así:

$$\rho_1 v_1 \mathrm{d}S_1 = \rho_2 v_2 \mathrm{d}S_2 \qquad\qquad v_1 S_1 = v_2 S_2$$

§17.5.- Ecuación de Bernoulli.

Formulación del ***principio de conservación de la energía*** aplicado al flujo estacionario e incompresible de un fluido ideal.

Centremos nuestra atención en la porción de fluido que llamaremos *sistema* o *volumen de control*. Transcurrido un intervalo de tiempo infinitesimal dt, el sistema habrá experimentado un cierto desplazamiento. El efecto neto desde un punto de vista energético es la elevación de la porción de fluido representada por el área sombreada desde la cota z_1 a la cota z_2; designaremos por dm la masa de dicha porción del fluido.



Igualamos el **trabajo neto** realizado sobre el sistema por las fuerzas de presión ejercidas por el fluido inmediato este trabajo con el **cambio que experimenta la energía total del sistema**:

- trabajo neto, $\mathrm{d}W = (p_1 \mathrm{d}S_1)\mathrm{d}l_1 - (p_2 \mathrm{d}S_2)\mathrm{d}l_2 = p_1 \mathrm{d}V_1 - p_2 \mathrm{d}V_2 = \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right)\mathrm{d}m$
- energía potencial gravitatoria, $\mathrm{d}E_\mathrm{p} = \mathrm{d}m\, g(z_2 - z_1)$
- energía cinética, $\mathrm{d}E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\mathrm{d}m\left(v_2^2 - v_1^2\right)$

De modo que

$$\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right) = g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) \quad \rightarrow \quad \frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

y como los subíndices 1 y 2 se refieren a dos puntos cualesquiera a lo largo del tubo de corriente, podemos suprimirlos y escribir simplemente

Ecuación de Bernoulli $$\boxed{e = \frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = \text{cte.}}$$

Cada uno de los tres términos de la ecuación tiene las dimensiones de una energía por unidad de masa (*energía específica*). Llamaremos *energía mecánica total específica*, y la designaremos por ***e***, a la suma de la energía potencial específica asociada a la presión (p/ρ), de la energía potencial gravitatoria específica (gz) y de la energía cinética específica ($v^2/2$). Así, la ecuación de Bernoulli establece que

la *energía mecánica total específica* permanece constante a lo largo de una línea de corriente.

La ecuación de Bernoulli puede reescribirse en la forma:

$$\boxed{p+\rho gz+\frac{1}{2}\rho v^2=\text{cte.}}$$

en la que cada uno de los tres términos tiene dimensiones de presión o de energía por unidad de volumen (***densidad de energía***). *La presión dinámica o total* es la suma de la *presión estática* ($p+\rho gz$) y de la *presión cinética* ($\rho v^2/2$).

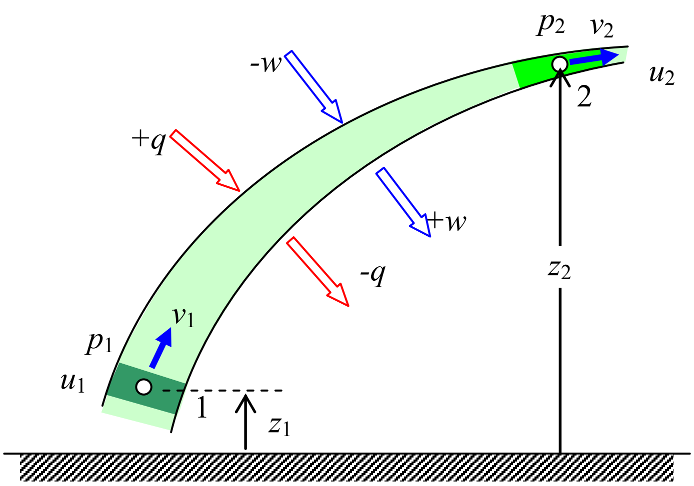
También puede escribirse en la forma:

$$\boxed{\frac{p}{\rho g}+z+\frac{v^2}{2g}=\text{cte.}}$$

en la que los tres términos tienen las dimensiones de longitud, y se designan frecuentemente como *alturas de presión*, *de cota o topográfica* y *de velocidad*, respectivamente.

§17.6.- Balance energético en una corriente fluida.

Aplicamos el principio de conservación de la energía en su forma más general (Primer Principio de la Termodinámica) a un tubo de corriente para cualquier régimen flujo estacionario en el que se intercambie energía, en forma de calor o de trabajo, entre el fluido y su entorno. Entonces, la ecuación de Bernoulli deberá escribirse en la forma



$$e_1+u_1+q=e_2+u_2+w$$

donde:

e representa la ***energía mecánica específica*** (*i.e.*, por unidad de masa)

$$e=\frac{p}{\rho}+gz+\frac{v^2}{2}=\text{cte.}$$

u representa la ***energía interna específica***

w es el ***trabajo específico*** realizado *sobre* el volumen de control de fluido (w<0) o *por* el fluido (w>0),

q es el ***calor*** **transferido** al volumen de control de fluido (q<0), o desde éste al medio ambiente (q>0), **por unidad de masa de fluido**.

Ordenando los términos:

$$\boxed{(e_1 - e_2) = (u_2 - u_1) + w - q}$$

de modo que el segundo miembro de la expresión es igual a la ***pérdida de energía mecánica específica*** durante el intervalo de tiempo empleado por el volumen de control en avanzar desde la sección 1 a la 2.

Si el **flujo es viscoso**, existirán fuerzas de fricción entre los tubos de corriente o las capas fluidas adyacentes en movimiento relativo, lo que implica una disipación de energía mecánica, de modo que parte del trabajo realizado por las fuerzas de presión y gravitatorias, que en el caso de un fluido no viscoso e incompresible se manifestaba como aumento de la energía cinética, ahora aparecerá como energía calorífica. Esto es, se produce una conversión irreversible de energía mecánica en energía interna del fluido y en calor que es transferido al exterior. En estas condiciones, la energía mecánica no permanecerá constante a lo largo del tubo de corriente, sino que irá disminuyendo, a menos que se suministre energía al flujo, conforme se evalúa en puntos más avanzados de la corriente. Así, en los problemas prácticos en los que no pueda ignorarse la viscosidad deberán introducirse las correcciones empíricas o semiempíricas apropiadas para tener en cuenta esta *pérdida de carga* conforme se avanza en el sentido de la corriente.

Si el fluido es ideal e incompresible y no se aporta energía calorífica al mismo, la energía interna específica será constante a lo largo del tubo de corriente y podrá ser suprimida en la expresión anterior, de modo que podemos escribir:

$$\boxed{(e_1 - e_2) = w}$$

donde w será positivo o negativo según se extraiga (+) o se proporcione (-) energía, en forma de trabajo, de la corriente fluida.

Podemos interpretar la expresión anterior de la siguiente forma:

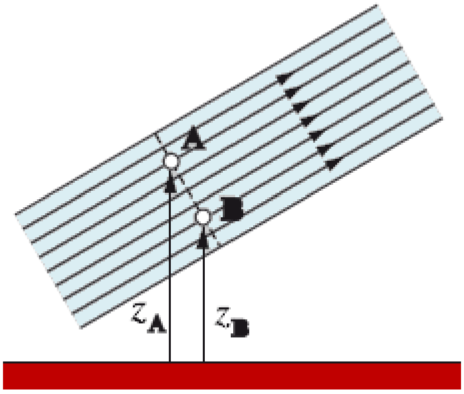
La *pérdida de energía mecánica específica* entre dos puntos del flujo es igual al *trabajo específico* realizado por el mismo.

La ***potencia***, *i.e.*, el trabajo por unidad de tiempo, realizado sobre el flujo (-) o realizado por el mismo (+) será

$$\boxed{P = \Phi\, w = \rho Q w}$$

§17.7.- Medida de las presiones estática y dinámica en un flujo.

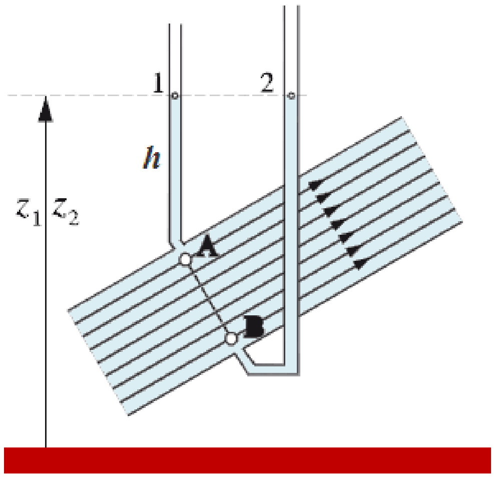
17.7.a. Medida de la presión estática.



Para un flujo estacionario, no viscoso, incompresible e irrotacional en el interior de una tubería.

$$p_A + \rho g z_A + \cancel{\frac{1}{2}\rho v^2} = p_B + \rho g z_B + \cancel{\frac{1}{2}\rho v^2}$$

La presión estática *p+ρgz* es la misma en todos los puntos de una misma sección recta de la tubería.



La presión estática en una sección recta de la tubería puede medirse acoplando a ésta un ***tubo piezométrico***; esto es, un tubo abierto por sus dos extremos y colocado, generalmente, en posición vertical.

El extremo del tubo piezométrico acoplado a la tubería se llama ***toma de presión estática*** y puede estar situado sobre la pared de la tubería o en el interior de ésta.

El fluido penetra y sube por el tubo piezométrico hasta que alcanza en él un cierto nivel, que mediremos respecto a un plano horizontal de referencia; este nivel recibe el nombre de ***altura piezométrica***

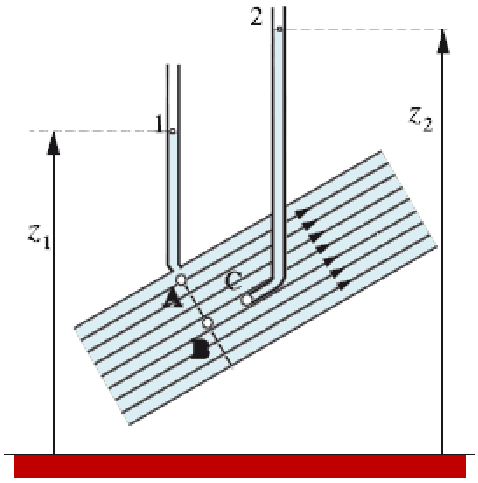
$$\begin{cases} p_{atm} + \rho g z_1 = p_A + \rho g z_A & \rightarrow \quad p_A - p_{atm} = \rho g (z_1 - z_A) = \rho g h \\ p_A + \rho g z_A = p_B + \rho g z_B & \\ p_B + \rho g z_B = p_{atm} + \rho g z_2 & \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro todas las expresiones, resulta $z_1 = z_2$

17.7.b. Medida de la presión dinámica.

Acoplaremos otro tubo piezométrico que desemboque en el interior de la tubería, en el punto C, de modo que esa obertura esté orientada perpendicularmente a las líneas de corriente; el fluido penetrará y ascenderá por este tubo hasta alcanzar un nivel z_2. El punto C recibe el nombre de ***punto de estancamiento***, por ser nula en él la velocidad del flujo.

$$\begin{cases} p_{\text{atm}} + \rho g z_1 = p_{\text{A}} + \rho g z_{\text{A}} \\ p_{\text{A}} + \rho g z_{\text{A}} = p_{\text{B}} + \rho g z_{\text{B}} \\ p_{\text{B}} + \rho g z_{\text{B}} + \dfrac{1}{2}\rho v_{\text{B}}^2 = p_{\text{C}} + \rho g z_{\text{C}} \\ p_{\text{C}} + \rho g z_{\text{C}} = p_{\text{atm}} + \rho g z_2 \end{cases}$$



Sumando miembro a miembro las dos últimas ecuaciones:

$$\left(p_{\text{B}} + \rho g z_{\text{B}} + \frac{1}{2}\rho v_{\text{B}}^2 \right) - p_{\text{atm}} = \rho g z_2$$

Sumando miembro a miembro todas las expresiones

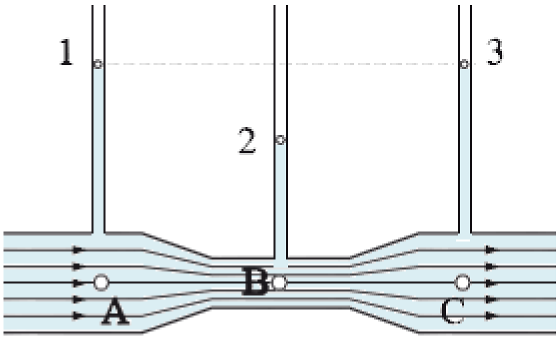
$$\rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_{\text{B}}^2 = \rho g z_2 \quad \rightarrow \quad \rho g\left(z_2 - z_1\right) = \frac{1}{2}\rho v_{\text{B}}^2 \quad \rightarrow \quad v_{\text{B}} = \sqrt{2g\left(z_2 - z_1\right)}$$

resultando que la diferencia de alturas piezométricas en ambos tubos constituye una medida de la **presión cinética** en el punto B.

§17.8.- Aplicaciones

17.8.a. Efecto de Venturi.

El efecto de Venturi se refiere a la disminución de presión estática asociada con el aumento de velocidad en un *flujo ideal*.



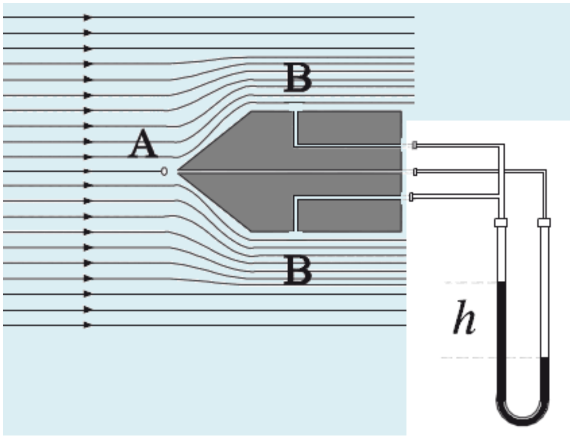
$$p_{\text{A}} + \frac{1}{2}\rho v_{\text{A}}^2 = p_{\text{B}} + \frac{1}{2}\rho v_{\text{B}}^2 \quad \rightarrow$$

$$p_{\text{A}} - p_{\text{B}} = \frac{1}{2}\rho\left(v_{\text{B}}^2 - v_{\text{A}}^2\right) > 0$$

- ***Cuanto menor sea la sección recta de la tubería, menor será la altura piezométrica*** (*i.e.*, la presión estática).
- El ***gradiente (caída) de presión estática*** entre los puntos A y B proporciona la fuerza neta necesaria para ***acelerar*** al fluido hacia el estrechamiento de la tubería.
- El paso de un fluido por un estrechamiento puede dar lugar a importantes reducciones de la presión estática. En el caso de los líquidos, será necesario que la presión absoluta (p) mínima (en el estrechamiento) sea superior a ***la tensión de vapor saturante*** a la

temperatura del flujo; en caso contrario, el líquido entra en ebullición y se forman burbujas de vapor en el seno del flujo. Este fenómeno recibe el nombre de ***cavitación***.

17.8.b. Tubo de Pitot



El tubo de Pitot es un aparato que se utiliza para medir la velocidad de una corriente fluida, generalmente gaseosa y en régimen de flujo externo.

Consiste en una sonda, diseñada con un perfil apropiado para evitar perturbaciones significativas en el régimen de flujo, que posee una abertura (A) en su extremo, enfrentada directamente a la corriente fluida, y otras aberturas (B) laterales, colocadas lo suficientemente hacia atrás para que en ellas la velocidad y la presión correspondan a los valores de corriente libre. La abertura A constituye una toma de presión total (punto de estancamiento); las oberturas B son tomas de presión estática.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos A y B tenemos

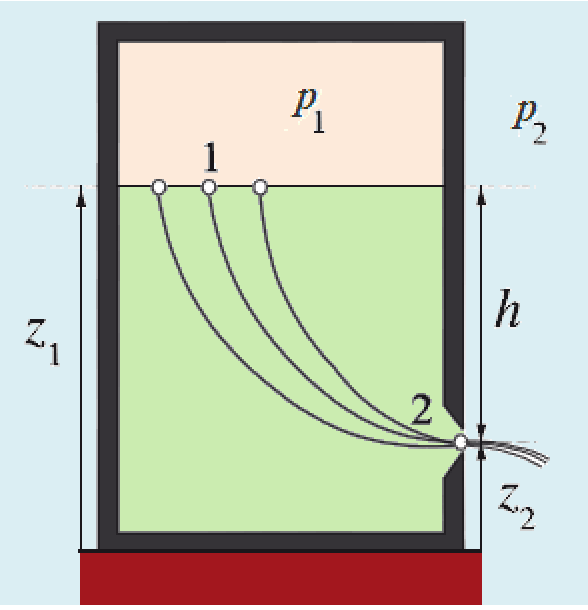
$$p_{\mathrm{A}} = p_{\mathrm{B}} + \frac{1}{2}\rho v^2 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2(p_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{B}})}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(\rho_{\mathrm{m}} - \rho)gh}{\rho}}$$

La diferencia de presiones se mide por la diferencia de niveles (h) del líquido manométrico (de densidad ρ_{m}) en las dos ramas de un manómetro diferencial acoplado a las tomas de presión.

Los tubos de Pitot se utilizan en los aviones para determinar la velocidad de éstos respecto al aire. En los *anemómetros*, el tubo de Pitot va montado solidariamente con una veleta que se encarga de enfrentarlo a la dirección del viento.

§17.9.- Teorema de Torricelli.

El líquido fluye a través de un pequeño orificio, de área *S*, practicado en la pared del depósito. La experiencia nos dice que todo el líquido participa en el movimiento y que el flujo es de tipo convergente en el depósito.



Aplicamos Bernoulli:

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\frac{p_1 - p_2}{\rho} + 2gh$$

con $z_1 - z_2 = h$.

Si consideramos el caso particular muy frecuente en el que la presión que actúa tanto sobre la superficie libre del líquido como en la salida sea la presión atmosférica, o sea, $p_1 = p_2 = p_{\text{atm}}$,

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gh$$

y si, además, es $S_1 \gg S_2$, de modo que será $v_1 \ll v_2$, entonces podemos considerar que $v_1^2 \approx 0$, con gran aproximación, de modo que tenemos

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Este es el enunciado del ***teorema de Torricelli***:

El líquido sale por el orificio con la misma velocidad que adquiriría un cuerpo en caída libre desde una altura *h*.

Para calcular el ***gasto o caudal*** a través del orificio, hay que tener en cuenta que el área de la sección recta del chorro continúa disminuyendo durante un corto recorrido fuera del depósito hasta que finalmente las líneas de corriente son paralelas entre sí. El chorro toma una forma característica; el área mínima de la sección transversal del chorro (S_c) recibe el nombre de ***sección contracta o vena contracta***.

La ley de Torricelli da la velocidad de salida una vez completada la contracción. El caudal vendrá dado por

$$Q = S_c v_2$$

Como el valor de S$_c$ no resulta fácil de medir, es conveniente definir el llamado coeficiente de contracción

$$C_c = \frac{\text{área de la sección contracta}}{\text{área de orificio}} = \frac{S_c}{S_2}$$

de modo que el caudal vendrá dado por

$$Q = C_c S_2 v_2$$

El coeficiente de contracción se determina experimentalmente; sus valores están tabulados, en obras especializadas, para diversas formas de los orificios y tubos de descarga.