

## 35.- Ondas progresivas.

§35.1. Introducción (1079); §35.2. Tipos de ondas (1080); §35.3. Frente de onda. Ondas planas y esféricas (1082); §35.4. Perturbación progresiva. Función de onda plana. Velocidad de fase (1084); §35.5. Ecuación diferencial de la onda plana (1086); §35.6. Ondas armónicas. Longitud de onda (1087); §35.7. Propagación de ondas planas en una dirección arbitraria (1090); §35.8. Ondas transversales. Polarización (1092); §35.9. Velocidad de propagación de las ondas transversales (1095); §35.10. Ondas longitudinales (1097); §35.11. Velocidad de propagación de las ondas longitudinales (1099); §35.12. Carácter adiabático del movimiento ondulatorio longitudinal (1103); §35.13. Ondas superficiales en los líquidos (1105); §35.14. Energía en el movimiento ondulatorio (1108); §35.15. Absorción (1114); Problemas (1115)

**§35.1. Introducción.-** El movimiento ondulatorio aparece en casi todos los campos de la Física. Sin duda alguna, la noción más intuitiva que tenemos del movimiento ondulatorio está asociada con las *ondas* producidas por el viento o alguna otra perturbación sobre la superficie del agua. Oímos un foco sonoro por medio de las ondas (*ondas sonoras*) que se propagan en el aire o en cualquier otro medio material; y las vibraciones del propio foco (v.g., la cuerda de una guitarra, la columna de aire en un tubo sonoro, ...) constituyen una onda denominada *onda estacionaria*. Muchas de las propiedades de la *luz* se explican satisfactoriamente por medio de una teoría ondulatoria, estando firmemente establecido hoy día que las *ondas luminosas* tienen la misma naturaleza que *las radiondas, las radiaciones infrarrojas y ultravioletas, los rayos X y la radiación gamma*. Uno de los progresos más importantes de la Física del siglo XX ha sido el descubrimiento de que toda la materia está dotada de propiedades ondulatorias (*ondas de materia*) y que, por ejemplo, un cristal difracta del mismo modo un haz de electrones que un haz de rayos X.

En esta Lección vamos a centrar nuestra atención en las ondas que se propagan en los medios deformables o medios elásticos. Tales ondas, entre las que se encuentran las ondas sonoras ordinarias, pueden denominarse *ondas mecánicas* y se originan al desplazarse alguna porción de un medio elástico de su posición normal, iniciándose así una oscilación respecto a su posición de equilibrio. Entonces, debido a las propiedades elásticas del medio material, la perturbación original se transmite a las porciones de materia vecinas, y de éstas a las siguientes, y así sucesivamente, de modo que *la perturbación se propaga por el medio*, alcanzando a todas las porciones de éste, que quedarán sometidas a movimientos análogos al del punto donde se inició la perturbación. Obviamente, todos los puntos del medio no serán alcanzados simultáneamente por la perturbación, ya que ésta *se propaga con una*

*velocidad finita* que depende de las propiedades (elásticas e inerciales, como veremos más adelante) del medio, de modo que las partículas más alejadas del origen de la perturbación comenzarán a moverse con un cierto retraso. En definitiva, podemos decir que

la propagación de una perturbación en un medio constituye un movimiento ondulatorio.

Obsérvese que *el medio mismo no se mueve en su conjunto* al progresar en él la perturbación (*i.e.*, la onda). Las partículas materiales del medio tan sólo *oscilan en trayectorias limitadas*, de modo que el movimiento ondulatorio no implica la traslación de materia. *Lo único que se traslada o transmite es "movimiento"* (aunque mejor sería decir *energía*).

Así, por ejemplo, en las ondas que se forman sobre la superficie del agua de un estanque, los pequeños objetos que están flotando sobre dicha superficie nos muestran que el movimiento real de las diversas porciones del agua consiste en pequeños desplazamientos hacia adelante-atrás y hacia arriba-abajo. La onda en sí (*i.e.*, la perturbación) avanza continuamente sobre la superficie del agua y cuando alcanza a los objetos flotantes los pone en movimiento, transfiriéndoles energía.

*El movimiento ondulatorio transporta energía*. Este transporte de energía, que puede tener lugar a distancias considerables, se realiza *sin necesidad de desplazamiento de materia* a gran distancia, ya que cada elemento del medio *transmite energía* a los elementos vecinos.

Para que se propaguen las ondas mecánicas es necesario tener como soporte un *medio material*. Sin embargo, no es necesario tal medio para la propagación de ondas electromagnéticas (*v.g.*, la luz), que pueden propagarse en el vacío, aunque también se propagan en los medios materiales. Las propiedades del medio material que determinan la velocidad de las ondas mecánicas en él son su *elasticidad* y su *inercia*. Todos los medios materiales (*v.g.*, aire, agua, acero, ...) poseen esas propiedades y en ellos pueden propagarse las ondas mecánicas. Es la *elasticidad* la que da lugar a las fuerzas restauradoras sobre cualquier elemento que se desplace de su posición de equilibrio; es la *inercia* la que responderá a esas fuerzas restauradoras.

**§35.2. Tipos de ondas.-** La perturbación que se propaga en un medio puede ser de naturaleza muy diversa, y *la onda recibe el nombre de la magnitud física cuya perturbación se propaga*. Así, tenemos ondas de desplazamiento, ondas de presión (*v.g.*, las ondas sonoras), ondas térmicas, ondas electromagnéticas (*v.g.*, la luz), .... Como la magnitud física asociada con la onda puede ser escalar o vectorial, las ondas pueden tener carácter *escalar* o *vectorial*.

Podemos distinguir diferentes tipos de ondas al considerar como están relacionados los movimientos de las partículas del medio material con respecto a la dirección de propagación de la onda misma. Si las oscilaciones de las partículas son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda, tenemos una *onda transversal*. Por el contrario, si las partículas oscilan en la dirección en que se propaga la onda, tenemos una *onda longitudinal*.

Por ejemplo, imaginemos que a uno de los extremos de una cuerda tensa le aplicamos una sacudida transversal; la perturbación que experimenta dicho extremo no queda localizada en él, sino que avanza a lo largo de la cuerda, como se ilustra en las instantáneas sucesivas que se muestran en la Figura 35.1. La perturbación se

propaga a lo largo de la cuerda, pero los distintos elementos o porciones de la cuerda tan sólo se desplazan en dirección perpendicular a la cuerda, *i.e.*, en dirección perpendicular a la de propagación de la perturbación, cuando la perturbación llega hasta ellos. *Esta onda es transversal.*

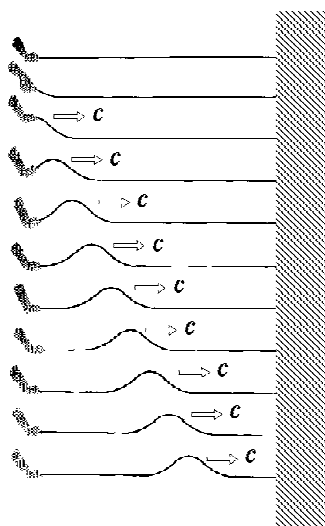


Figura 35.1

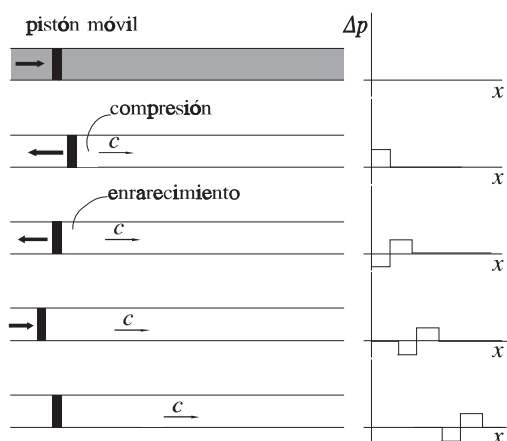


Figura 35.2

Para comprender la mecánica de una onda longitudinal imaginaremos un tubo largo, lleno de un fluido y provisto de un émbolo (Figura 35.2). Supongamos que, súbitamente, desplazamos ligeramente el émbolo hacia la derecha. Durante el avance del émbolo, las partículas fluidas justamente en contacto con él son obligadas a desplazarse hacia adelante, originándose junto al émbolo una región cuya presión es superior a la de equilibrio (compresión o condensación). Esta perturbación progresa a lo largo del tubo con una velocidad constante, como se ilustra en las instantáneas sucesivas que se muestran en la Figura 35.2. El movimiento de cada una de las partículas o porciones del fluido es hacia adelante, paralelo a la dirección en que se propaga la perturbación. *Esta onda es longitudinal* (las ondas sonoras son de este tipo).

Las ondas luminosas no son ondas mecánicas; la perturbación que se propaga no es un movimiento de materia, sino un campo electromagnético. Pero como los campos eléctrico y magnético son perpendiculares a la dirección de propagación, las ondas luminosas tienen carácter transversal.

Algunas ondas no son ni puramente transversales ni puramente longitudinales. Este es el caso de las ondas superficiales en el agua, ya que las partículas fluidas describen trayectorias elípticas o circulares en planos verticales paralelos a la dirección de propagación (Figura 35.26). Estas ondas pueden considerarse como la superposición de una onda transversal y otra longitudinal de la misma frecuencia, desfasadas  $90^\circ$ .

También podemos establecer una clasificación de las ondas atendiendo al número de dimensiones espaciales en que se propaga la energía; así hablaremos de ondas *unidimensionales*, *bidimensionales* y *tridimensionales*. Las ondas que avanzan a lo largo de una cuerda tensa o en el interior de un tubo sonoro, como en los ejemplos anteriores, son unidimensionales; las ondas superficiales en el agua son bidimensio-

nales; las ondas sonoras o luminosas que emanan de una fuente de pequeñas dimensiones son tridimensionales.

Además, una onda puede consistir en la propagación de un sólo pulso (*pulso de onda*), de manera que cada partícula del medio tan sólo se mueve durante el intervalo de tiempo que emplea el pulso en pasar por ella. Los ejemplos anteriores (Figura 35.1 y Figura 35.2) corresponden a pulsos de onda transversal y longitudinal, respectivamente.

Una característica importante de un pulso de onda es que tiene un principio y un fin. Esto es, la perturbación tiene una extensión limitada, de modo que en un instante dado sólo será perturbada una región limitada del medio recorrido por el pulso. Normalmente, el pulso de onda varía de forma conforme se desplaza, ensanchándose gradualmente. Este efecto, denominado *dispersión*, se produce en todas las ondas (excepto en las ondas electromagnéticas en el vacío), pero en muchos casos de interés práctico es despreciable, de modo que el pulso conserva aproximadamente su forma.

Una onda también puede consistir en una sucesión de pulsos (*tren de ondas*), idénticos o no. Si las perturbaciones son periódicas, tendremos un *tren de ondas periódico*, y cada partícula del medio adquirirá un movimiento periódico. El caso más simple e interesante es el de una *onda armónica simple u onda sinusoidal*, que comunica a cada partícula del medio un movimiento armónico simple. Idealmente, una onda periódica no tiene principio ni fin, de modo que la perturbación tiene una extensión ilimitada en el espacio. A diferencia de un pulso de onda, estas ondas no se dispersan cuando se propagan.

**§35.3. Frente de onda. Ondas planas y esféricas.-** La perturbación que recorre un medio avanza con una cierta velocidad que depende de las propiedades del medio. Si el medio es isótropo, la velocidad de propagación de la perturbación es la misma en todas las direcciones del espacio.

Imaginemos un pulso tridimensional que se origina en un punto O de un medio isótropo indefinido (Figura 35.3). Si es  $c$  la velocidad con que avanza este pulso, al cabo de un cierto tiempo,  $t$ , la perturbación habrá afectado a todos los puntos de una superficie esférica de radio  $r=ct$  y centro en O. Todas las partículas del medio que se encuentren sobre una superficie esférica centrada en el punto O (origen de la perturbación) serán alcanzadas simultáneamente por la perturbación y experimentarán

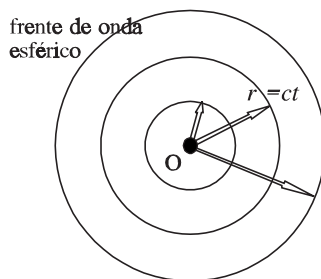


Figura 35.3

una perturbación similar a la original en el punto O, pero con un cierto retraso. Conforme transcurre el tiempo, esta superficie se desplaza, mostrando como se propaga la perturbación en el medio. Si la *perturbación es periódica*, podemos generalizar la idea anterior trazando superficies similares para pulsos subsiguientes. Estas superficies reciben el nombre de *superficies* o *frentes de onda*. En un instante dado, todos los puntos situados sobre una cualquiera de tales superficies (esféricas, en nuestro ejemplo) se encuentran en el mismo estado o fase de movimiento (*i.e.*, están *en fase*).

Se denomina *superficie o frente de ondas* al lugar geométrico determinado por los puntos del medio que son alcanzados simultáneamente por la perturbación y que, en consecuencia, en cualquier instante dado están en el mismo estado o fase de la perturbación.

La dirección de propagación de la perturbación (*i.e.*, de la energía) es perpendicular al frente de onda. Una línea normal a los frentes de onda, que indica la dirección y sentido de propagación de la perturbación, se denomina *rayo*.

Los frentes de onda pueden tener formas muy diversas. Si las ondas se propagan en sólo una dirección, los frentes de onda estarán constituidos por planos paralelos (*ondas planas*). En un instante dado, las condiciones son idénticas en todos los puntos de un plano cualquiera perpendicular a la dirección de propagación. Los frentes de onda son planos y los rayos son rectas paralelas (Figura 35.4a). Tenemos un ejemplo de este tipo de ondas en las proximidades de una *membrana vibrante*.

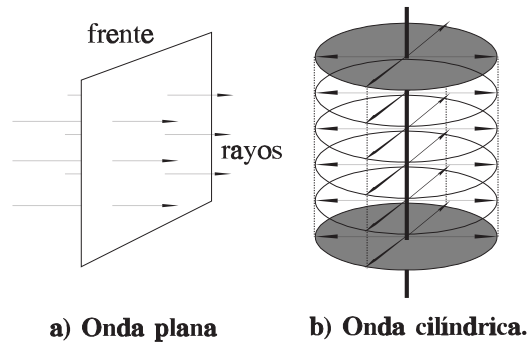


Figura 35.4

En la naturaleza encontramos ondas que se propagan en varias dimensiones del espacio, de las cuales las más interesantes son *las ondas esféricas, las cilíndricas y las circulares*.

En el caso de las *ondas esféricas*, la perturbación se propaga con la misma velocidad en todas las direcciones del espacio, alejándose radialmente del punto que constituye el foco de las ondas. Como ejemplo, podemos imaginar una esfera de pequeñas dimensiones cuyo radio fluctúa periódicamente (*esfera pulsante*). En estas condiciones, los frentes de ondas están constituidos por superficies esféricas centradas en el foco y los rayos coinciden con las direcciones radiales (Figura 35.3)<sup>1</sup>. Estas ondas son tridimensionales, y se generan, por ejemplo, cuando se produce repentinamente un cambio de presión en un punto de un fluido extenso.

Si imaginamos un conjunto infinito de fuentes puntuales uniformemente distribuidas sobre una línea recta o eje, todas ellas oscilando en fase, el resultado será una *onda cilíndrica* (Figura 35.4b). Los frentes de onda serán superficies cilíndricas concéntricas en dicho eje y la onda se propagará en todas las direcciones perpendiculares al mismo eje. La onda cilíndrica es bidimensional. Una buena aproximación de esta situación la tenemos en las proximidades de una *antena radiante*.

Las *ondas circulares* son ondas bidimensionales que se propagan sobre una superficie, tal como la superficie libre de un fluido o una membrana tensa. Si se produce una perturbación en un punto de la superficie, la perturbación se propagará

<sup>1</sup> En los medios *anisótropos*, la velocidad de propagación depende de la dirección considerada y los frentes de onda no serán esféricos, sino elipsoidales.

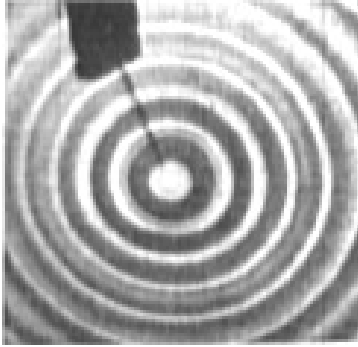


Figura 35.5

por la superficie con la misma velocidad en todas las direcciones, resultando un conjunto de frentes de onda circulares. Obsérvese que, en este caso, los frentes de onda no son superficies, sino líneas. En la Figura 35.5 mostramos una fotografía de ondas planas circulares en la superficie del agua, en una *cubeta de ondas*, propagándose desde un punto en el que una varilla en oscilación hace contacto con la superficie del agua.

#### §35.4. Perturbación progresiva. Función de onda plana. Velocidad de fase.-

Supongamos que producimos una perturbación de cualquier tipo en un punto O de un medio indefinido. Si representamos por  $\Psi$  el valor de la magnitud física perturbada, entonces el valor de dicha magnitud en el punto O (que tomaremos como origen de coordenadas), en un instante dado  $t$ , vendrá expresado por la función (Figura 35.6)

$$\Psi = \Psi(t) \quad \text{en } x = 0 \quad [35.1]$$

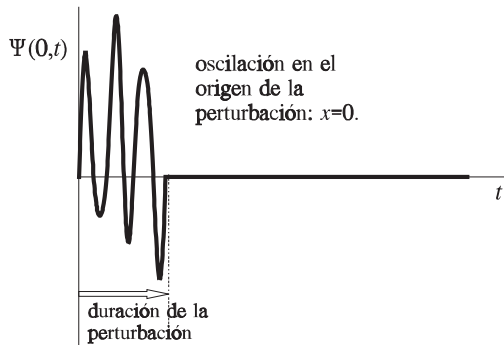


Figura 35.6

Esta perturbación se propaga por el medio y, si el frente de onda es plano y la absorción es despreciable, se reproduce en todos los puntos del medio que sean alcanzados por la perturbación. Nuestro objetivo es encontrar una función similar a la [35.1] que nos describa la perturbación en un punto P, de abscisa  $x$ .

Naturalmente, la perturbación empleará un cierto tiempo  $t' = x/c$  en recorrer la distancia

$x = OP$  con una velocidad  $c$ . Si midiésemos el tiempo a partir del instante  $t'$ , la función [35.1] nos describiría la perturbación en el punto P; pero si medimos el tiempo a partir del instante inicial considerado anteriormente, la función que nos describirá la perturbación en P será

$$\Psi(x,t) = \Psi(t - t') = \Psi\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad [35.2]$$

Esta función nos da el mismo valor de  $\Psi$  en el instante  $t = t'$  en el punto P (de abscisa  $x$ ), que el que teníamos para  $t = 0$  en el origen de la perturbación (de abscisa  $x = 0$ ) (Figura 35.7). La función [35.2] es la función general que representa una perturbación de cualquier clase que se propaga en la dirección positiva del eje  $x$ , *i.e.*, la *función de onda plana*.

Consideremos más cuidadosamente la función [35.2] (*vide* Figura 35.7). Si deseamos seguir una cierta *fase* de la perturbación conforme transcurre el tiempo y ésta avanza en el medio, entonces debemos buscar en la función [35.2] un cierto valor constante de  $\Psi$  (v.g., la parte más alta de los pulsos). Desde el punto de vista matemático, esto significa que buscamos como cambia  $x$  con respecto a  $t$  cuando  $(t-x/c)$  se conserva constante. Inmediatamente vemos que cuando  $t$  aumenta  $x$  también debe aumentar a fin de que se conserve constante el valor de  $(t-x/c)$ . Por consiguiente, la función [35.2] representa una perturbación que se propaga en la dirección positiva del eje  $x$  (Figura 35.8a). Obviamente, para una perturbación que se propague en la dirección negativa del eje  $x$  deberemos escribir<sup>2</sup>

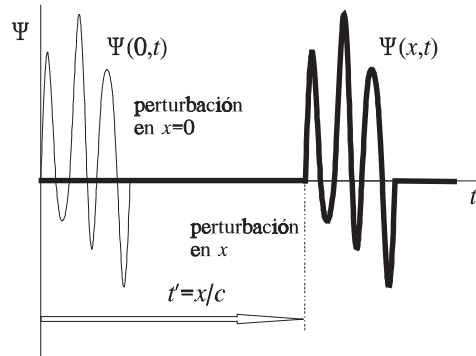


Figura 35.7

$$\Psi(x,t) = \Psi\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad [35.3]$$

La velocidad con que avanza cierta fase de la perturbación se obtiene fácilmente. Para cierta fase de una perturbación que se propaga en la dirección del eje  $x$  escribiremos

$$t - \frac{x}{c} = \text{cte.} \quad [35.4]$$

de modo que derivando respecto a  $t$  nos queda

$$1 - \frac{1}{c} \frac{dx}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{dx}{dt} \quad [35.5]$$

de manera que  $c$  es realmente la *velocidad de fase* de la perturbación.

La ecuación de una perturbación progresiva (o función de onda) puede interpretarse de otra manera. Obsérvese que para cualquier valor fijo de  $t$  (*i.e.*, para un instante dado) la función  $\Psi(x,t)$  nos presenta  $\Psi$  como función exclusivamente de  $x$ ; esto es,  $\Psi(x)$ . Esta función define una curva que representa, por ejemplo, la forma que tiene en un instante dado una cuerda tensa por la que se propaga una perturbación transversal. Así pues, la función  $\Psi(x)$  representa *la forma de la perturbación*

<sup>2</sup> En lo que sigue, utilizaremos la expr. [35.2] para representar tanto una perturbación que se propaga en el sentido positivo como en el negativo del eje  $x$ ; para ello será suficiente considerar el signo de la velocidad de propagación  $c$ , que será positivo o negativo según sea el caso.

Además, el alumno comprobará fácilmente que las funciones  $\Psi(ct-x)$ ,  $\Psi(x-ct)$ , ... también representan ondas planas que se propagan en la dirección positiva o negativa, según sea el caso, del eje  $x$ .

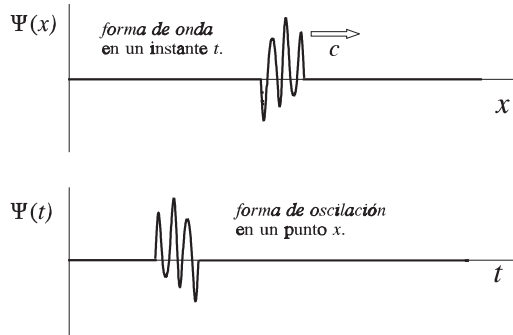


Figura 35.8

(forma de onda) en un instante dado (Figura 35.8a).

Pero también podemos centrar nuestra atención en un punto cualquiera del medio (v.g., de la cuerda), esto es, para un valor fijo de  $x$ . Entonces, la función  $\Psi(t)$  nos describe como cambia el valor de la magnitud física  $\Psi$  en dicho punto en función del tiempo (Figura 35.8b).

**§35.5. Ecuación diferencial de la onda plana.-** Como las variaciones de las magnitudes físicas implicadas en los procesos físicos están gobernadas por leyes dinámicas que pueden expresarse mediante ecuaciones diferenciales, resultará interesante y conveniente explorar la posibilidad de encontrar una ecuación diferencial que sea aplicable a todo tipo de movimiento ondulatorio. Si ello es posible, entonces, cada vez que encontremos que las variaciones de una cierta magnitud física, implicada en un determinado proceso, satisfagan tal ecuación diferencial, podremos asegurar que tales variaciones se propagan como una onda no amortiguada con una velocidad bien definida.

Esta forma de actuar es similar a la que ya hemos utilizado en lecciones anteriores con el m.a.s., que está gobernado por una ecuación diferencial de la forma  $d^2x/dt^2 + \omega^2x = 0$ , que es la ecuación diferencial del m.a.s. no amortiguado. Entonces, hemos podido servirnos de esta ecuación para identificar diversos tipos de m.a.s. (vide: §13.7 sistema masa-muelle, §13.8 péndulo simple, §21.3 péndulo físico, §28.2 oscilaciones de torsión, ...), una vez establecidas las leyes del movimiento correspondientes a cada una de las diversas situaciones físicas.

Para encontrar la ecuación diferencial del movimiento ondulatorio unidimensional no amortiguado, partiremos de la función de onda que lo describe, esto es

$$\Psi(x,t) = \Psi\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad [35.6]$$

y designaremos por  $\vartheta = t - x/c$  la fase del movimiento ondulatorio, de modo que será  $\Psi = \Psi(\vartheta)$ . Como tenemos dos variables independientes,  $x$  y  $t$ , deberemos usar derivadas parciales y serán

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{1}{c} \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 1 \quad [35.7]$$

Calculando las derivadas primeras de la función  $\Psi(x,t)$  respecto de  $x$  y de  $t$  tenemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{d\Psi}{d\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{d\Psi}{d\vartheta} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{d\Psi}{d\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{d\Psi}{d\vartheta} \quad [35.8]$$

y calculando ahora las derivadas segundas



$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{d}{d\vartheta} \left( -\frac{1}{c} \frac{d\Psi}{d\vartheta} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \Psi}{d\vartheta^2} \quad [35.9]$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{d\Psi}{d\vartheta} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{d^2 \Psi}{d\vartheta^2}$$

y combinando ambos resultados eliminaremos  $d^2\Psi/d\vartheta^2$ , de modo que tenemos finalmente

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad [35.10]$$

que es la *ecuación diferencial del movimiento ondulatorio unidimensional* (onda plana) *no amortiguado*. A veces, se le llama simplemente *ecuación de onda plana*.

En virtud de como hemos llegado a establecer la ecuación de onda [35.10], resulta obvio afirmar que cualquier función de la forma  $\Psi(t-x/c)$  o equivalente [v.g.,  $\Psi(x-ct)$ ,  $\Psi(ct-x)$ ,  $\Psi(\omega t-kx)$ , ...] será solución de la ecuación diferencial [35.10]. En un proceso físico definido, la forma concreta de la función de onda  $\Psi(t-x/c)$  que satisfaga a la ecuación de onda deberá determinarse a partir de condiciones adicionales asociadas con el proceso físico en cuestión.

**§35.6. Ondas armónicas. Longitud de onda.**- Supongamos que la perturbación en el punto O, que tomaremos como origen de abscisas, sea una perturbación armónica, de modo que los cambios que experimenta la magnitud física  $\Psi$  venga descrita en dicho punto ( $x=0$ ) por

$$\Psi(0,t) = A \text{ sen } \omega t \quad [35.11]$$

Al propagarse la perturbación a otros puntos del medio, la variación de la magnitud física  $\Psi$  en función del tiempo en un punto de abscisa  $x$  vendrá dada por

$$\Psi(x,t) = A \text{ sen } \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \quad [35.12]$$

que es la expresión matemática de una perturbación armónica propagándose en la dirección del eje  $x$ ; *i.e.*, la *función de onda armónica plana*.

En las expresiones [35.11] y [35.12]  $A$  y  $\omega$  representan respectivamente la *amplitud* y la *frecuencia angular* de la perturbación armónica y  $c$  es la velocidad de propagación de la onda. Si denominamos por  $T$  y  $\nu$  el *periodo* y la *frecuencia*, respectivamente, de dicha perturbación armónica, será

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu \quad [35.13]$$

de modo que [35.12] también se puede escribir como

$$\Psi(x,t) = A \text{ sen } \left[ \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \quad [35.14]$$

o bien 
$$\Psi(x,t) = A \operatorname{sen} \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right) \right] \quad [35.15]$$

El producto  $cT$  (que tiene dimensiones de una longitud) representa la distancia a la que se propaga la perturbación en el transcurso de un periodo. A dicha distancia la llamamos *longitud de onda* y la representamos por  $\lambda$ ; esto es,

$$\lambda = cT \quad [35.16]$$

Es fácil comprender que la longitud de onda representa, también, la distancia mínima que existe entre dos puntos del medio que oscilan en fase.

Sustituyendo [35.16] en [35.15], la *función de onda* armónica plana queda en la forma

$$\Psi(x,t) = A \operatorname{sen} \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \quad [35.17]$$

en la que se pone de manifiesto que el *periodo*  $T$  y la *longitud de onda*  $\lambda$  desempeñan papeles análogos en lo que respecta a la periodicidad de la función sinusoidal.

En efecto, el movimiento ondulatorio descrito por la función de onda [35.17] presenta una *doble periodicidad*: en el tiempo y en el espacio. Si estamos interesados en analizar la situación general en todo el medio en un instante  $t=\text{cte.}$ , observaremos que el valor de la magnitud física  $\Psi$  se repite, en idénticas condiciones, en puntos

separados entre sí por distancias iguales a la longitud de onda  $\lambda$ , como se muestra en la Figura 35.9a, que representa una instantánea de la *forma de onda*. Pero, por el contrario, si centramos nuestra atención en lo que ocurre en un punto determinado del medio recorrido por la onda, digamos el punto de coordenada  $x=\text{cte.}$ , observaremos las oscilaciones de la magnitud física  $\Psi$  con un periodo  $T$  (Figura 35.9b).

Podemos escribir la función de onda [35.17] en una forma más compacta y conveniente si definimos el *número de onda angular*<sup>3</sup>, que designaremos por  $k$ , como

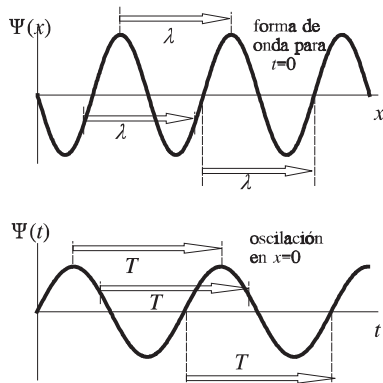


Figura 35.9

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad [35.18]$$

y recordamos que  $\omega = 2\pi/T$ , de modo que

$$\Psi(x,t) = A \operatorname{sen}(\omega t - kx) \quad [35.19]$$

<sup>3</sup> También llamado *vector de onda* o *vector de propagación*, por las razones que veremos más adelante, aunque de momento lo consideraremos como un escalar.

Ahora, dividiendo miembro a miembro las expresiones [35.13] y [35.18] y teniendo en cuenta la expresión [35.16] vemos que la velocidad de fase se puede expresar como

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} \quad [35.20]$$

En la onda progresiva representada por la función [35.19] hemos supuesto que la elongación  $\Psi$  es cero en el punto  $x=0$  en el instante  $t=0$ . Evidentemente, no es necesario que sea así, de modo que la expresión general de un tren de ondas armónicas unidimensionales que avanzan en el sentido positivo del eje  $x$  será

$$\Psi(x,t) = A \text{ sen } (\omega t - kx + \varphi) \quad [35.21]$$

en donde  $\varphi$  representa la constante de fase o fase inicial. Una constante de fase positiva representa un adelanto o desplazamiento de la forma de onda en el sentido en que avanza la onda. La magnitud de dicho desplazamiento será

$$s = \frac{\varphi}{k} = \frac{\varphi}{2\pi} \lambda \quad [35.22]$$

como se verá fácilmente al escribir la función de onda [35.21] en la forma

$$\Psi(x,t) = A \text{ sen } [\omega t - k(x - s)] \quad [35.23]$$

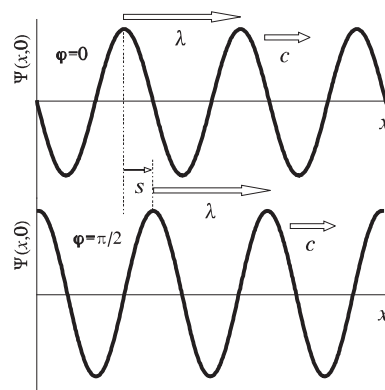


Figura 35.10

En la Figura 35.10 hemos dibujado las formas de onda correspondientes al instante  $t=0$  para  $\varphi=0$  y  $\varphi=\pi/2$ ; obsérvese que la segunda forma está adelantada  $\lambda/4$  respecto de la primera.

Es importante que distingamos con precisión entre la *velocidad de fase*,  $c$ , o velocidad de avance de la forma de onda, y la *velocidad  $v$  de las partículas del medio material* que está siendo recorrido por la onda. Así, en el caso de una onda transversal armónica propagándose a lo largo de una cuerda tensa, la elongación transversal de las partículas de la cuerda vendrá descrita por la función

$$y(x,t) \doteq \Psi(x,t) = A \text{ sen}(\omega t - kx) \quad [35.24]$$

y la velocidad de una partícula dada, de abscisa  $x$ , será

$$v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} \doteq \frac{\partial \Psi}{\partial t} = A\omega \text{ cos } (\omega t - kx) \quad [35.25]$$

donde la notación de derivada parcial nos recuerda que  $\Psi(x,t)$ , pero que aquí estamos suponiendo que  $x$  permanece constante, de modo que  $t$  queda como única variable. Análogamente, la aceleración de esa partícula será

$$a(x,t) = \frac{\partial v}{\partial t} \doteq \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -A\omega^2 \text{ sen}(\omega t - kx) \quad [35.26]$$

$$o \text{ sea} \quad a(x,t) = -\omega^2 y(x,t) \doteq -\omega^2 \Psi(x,t) \quad [35.27]$$

lo que nos confirma que cada partícula de la cuerda oscila con un movimiento armónico simple.

También podemos considerar las derivadas parciales con respecto a la coordenada  $x$  de la función de onda  $\Psi(x,t)$ , *i.e.*,  $\partial\Psi/\partial x$  y  $\partial^2\Psi/\partial x^2$ , que nos indican como varía  $\Psi$  al desplazarnos en la dirección del eje  $x$  manteniendo constante el tiempo, esto es, en un instante determinado. Efectuando las derivadas parciales respecto de  $x$  en la función [35.24], encontraremos

$$\frac{\partial y}{\partial x} \doteq \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -A k \cos(\omega t - kx) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \doteq \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -A k^2 \sin(\omega t - kx) \quad [35.28]$$

de modo que, combinando las expresiones [35.26] y [35.28b], y recordando que  $c=\omega/k$ , tendremos

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad [35.29]$$

que es la ecuación diferencial del movimiento ondulatorio unidimensional no amortiguado (o simplemente, la *ecuación de onda plana*), que, como ya sabemos, será satisfecha no solamente por la función de onda armónica [35.24] sino también por cualquier función de onda plana [*i.e.*, de la forma  $\Psi=\Psi(t-x/c)$  o equivalente].

**§35.7. Propagación de ondas planas en una dirección arbitraria.-** La función de onda  $\Psi=\Psi(t-x/c)$  describe un movimiento ondulatorio que se propaga en la dirección del eje  $x$ ; *i.e.*, una onda unidimensional. La palabra "unidimensional" no debe prestarse a interpretaciones erróneas; hace referencia exclusivamente a que la onda se propaga en una única dimensión o dirección del espacio que, por conveniencia, hemos hecho coincidir con la del eje  $x$ , aunque no esté necesariamente "concentrada" sobre dicho eje.

Si la perturbación de la magnitud física  $\Psi$  se extiende a todo el espacio, la función de onda  $\Psi(t-x/c)$  tomará el mismo valor, en un instante dado, en todos los puntos del plano  $x=cte.$ , que es un plano perpendicular al eje  $x$ . Dicho plano constituirá un *frente de onda*; por eso, *las denominaciones de onda unidimensional y onda plana son equivalentes*.

Así pues, la función  $\Psi=\Psi(t-x/c)$  describe en tres dimensiones una *onda plana* que se propaga paralelamente al eje

$x$ . Si la magnitud física  $\Psi$  es un desplazamiento (o un campo vectorial), la onda plana será longitudinal (**L**) o transversal (**T**) según que  $\Psi$  sea paralela o perpendicular a la dirección del eje  $x$  (Figura 35.11).

Una característica importante de la onda plana es la dirección en la que se propaga, que indicaremos mediante el vector  $\mathbf{u}$ , siendo completamente arbitraria la orientación de los

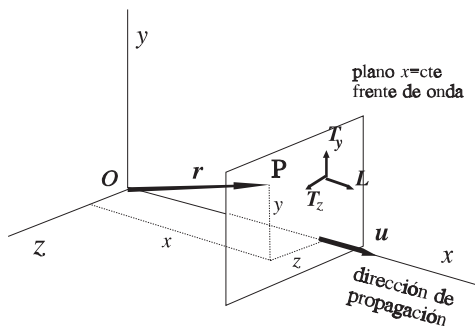


Figura 35.11

ejes del sistema de referencia. En consecuencia, deberemos expresar la función de onda en una forma tal que sea independiente de la orientación del sistema de referencia elegido.

Si designamos por  $\mathbf{r}$  el vector de posición de un punto genérico P del medio recorrido por la onda, *i.e.*,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad [35.30]$$

el producto  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$  será la distancia de dicho punto al origen O medida en la dirección de propagación, de modo que la función de onda

$$\Psi = \Psi \left( t - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{c} \right) \quad [35.31]$$

describe una onda plana que se propaga en la dirección  $\mathbf{u}$ .

En el caso de una onda plana sinusoidal que se propague en una dirección arbitraria del espacio indicada por el versor  $\mathbf{u}$  (Figura 35.12), en lugar de hacerlo en la dirección del eje  $x$ , como hemos venido suponiendo hasta ahora, la función de onda deberá escribirse en la forma

$$\Psi = A \text{sen}(\omega t - k \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \quad [35.32]$$

Resulta conveniente definir el vector  $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$ , llamado *vector de onda* o *vector de propagación*, cuya dirección es, obviamente, la de propagación de la onda y cuyo módulo es  $k = \omega/c$ . Con esta definición, escribiremos la función de onda plana sinusoidal en la forma

$$\Psi = A \text{sen}(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad [35.33]$$

o bien, en coordenadas cartesianas,

$$\Psi = A \text{sen}(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) \quad [35.34]$$

donde  $k_x, k_y, k_z$  son las componentes del vector de onda  $\mathbf{k}$  en el sistema de referencia que hayamos elegido; *i.e.*,

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{i} + k_y \mathbf{j} + k_z \mathbf{k} \quad \text{con} \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad [35.35]$$

Recordemos que una superficie o frente de onda es el lugar geométrico de los puntos del espacio que son alcanzados simultáneamente por el movimiento ondulatorio. Por consiguiente, la perturbación estará en fase en todos los puntos pertenecientes a un mismo frente de onda. Así, para una onda plana, los frentes de onda estarán formados por todos los puntos en los que la fase  $(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  tiene un mismo valor en un instante dado, por lo que quedarán definidos por la ecuación

$$\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{cte.} \quad \Rightarrow \quad k_x x + k_y y + k_z z = \omega t - \text{cte.} \quad [35.36]$$

la cual, para un instante dado, representa un plano perpendicular al vector de onda  $\mathbf{k}$ .

Cuando la propagación tiene lugar en el espacio tridimensional, al lector le resultará fácil demostrar que la *ecuación de onda plana* [35.10] deberá reescribirse como

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad [35.37]$$

o bien, en forma más compacta e *independiente del sistema de coordenadas elegido* (cartesianas, cilíndricas, esféricas, ...), escribiremos

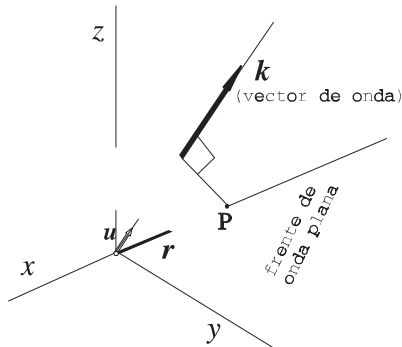


Figura 35.12

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad [35.38]$$

donde  $\nabla^2$  es el *operador laplaciano*; esto es,  $\nabla^2 \Psi \equiv \nabla \cdot (\nabla \Psi)$ . Como ya hemos indicado anteriormente, la resolución de esta ecuación entre derivadas parciales de segundo orden implica tener en cuenta ciertas condiciones adicionales.

Aunque hemos llegado a establecer las ecuaciones de onda [35.37] y [35.38] bajo el supuesto de ondas planas o unidimensionales, estas ecuaciones de onda son válidas en general, cualquiera que sea la "geometría de los frentes de onda".

Así, si se trata de una *onda esférica*, se expresará el operador  $\nabla^2$  en *coordenadas polares esféricas*  $(r, \theta, \varphi)$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Psi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \quad [35.39]$$

y, si la propagación es isotrópica, será  $\Psi(r, t)$ , *i.e.*, independiente de  $\theta$  y de  $\varphi$ , de modo que

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Psi) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Psi) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\Psi) \quad [35.40]$$

ecuación diferencial que se satisface, por ejemplo, por la *función de onda armónica esférica*

$$\Psi(r, t) = \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr) \quad [35.41]$$

como el alumno podrá comprobar fácilmente por sustitución directa. Obsérvese que, a diferencia de lo que ocurre con las ondas planas no amortiguadas, en las ondas esféricas la amplitud disminuye proporcionalmente a  $1/r$ , conforme los frentes de onda se van expandiendo.

**§35.8. Ondas transversales. Polarización.-** Sabemos que se genera una onda transversal siempre que las partículas materiales constituyentes del medio oscilan en planos perpendiculares a la dirección de propagación del movimiento ondulatorio. Estas oscilaciones pueden ser rectilíneas (armónicas o no) o no serlas.

Ilustraremos la generación de este tipo de ondas con un ejemplo sencillo. Imaginemos que uno de los extremos de una cuerda tensa es obligado a oscilar periódicamente en dirección transversal, adquiriendo un movimiento armónico simple de frecuencia  $\nu$ , periodo  $T$  y amplitud  $A$ . Por ahora, supondremos que la cuerda es suficientemente larga para que no sea necesario que nos preocupemos de lo que ocurrirá cuando la perturbación llegue al otro extremo. En estas condiciones, a lo largo de la cuerda avanzará un tren continuo de ondas sinusoidales transversales, como se muestra en la Figura 35.13, donde hemos representado el aspecto que exhibirá la cuerda (*i.e.*, la *forma de onda*) a intervalos de  $1/4T$ . Las distintas porciones de la cuerda no avanzan, sino que se limitan a realizar oscilaciones armónicas en dirección perpendicular a la cuerda.

En la onda transversal que acabamos de describir, las partículas materiales efectúan oscilaciones contenidas en un plano (el del papel, en la Figura 35.13). Las oscilaciones se realizan según rectas de dirección fija, perpendicular a la dirección de propagación del movimiento ondulatorio. Así pues, decimos que esta onda transversal está *polarizada rectilíneamente*. El plano en el que están contenidas las oscilaciones de todas las partículas recibe el nombre de *plano de oscilación* y también decimos que *la onda transversal está polarizada en un plano*.

Entre las infinitas direcciones perpendiculares a la dirección de propagación de la onda, escogeremos dos de ellas perpendiculares entre sí para definir unos ejes  $y$  y  $z$ , de modo que podamos expresar el vector de elongación transversal  $\Psi$  en función de sus componentes  $\Psi_y$  y  $\Psi_z$ . Si la dirección del vector  $\Psi$  no es constante, la forma de onda no estará contenida en un plano, *i.e.*, la onda no estará polarizada rectilíneamente (Figura 35.14). Obviamente, *cualquier onda transversal siempre puede ser considerada como la superposición de dos ondas polarizadas rectilíneamente* en direcciones perpendiculares, con amplitudes, frecuencias y desfase adecuados.

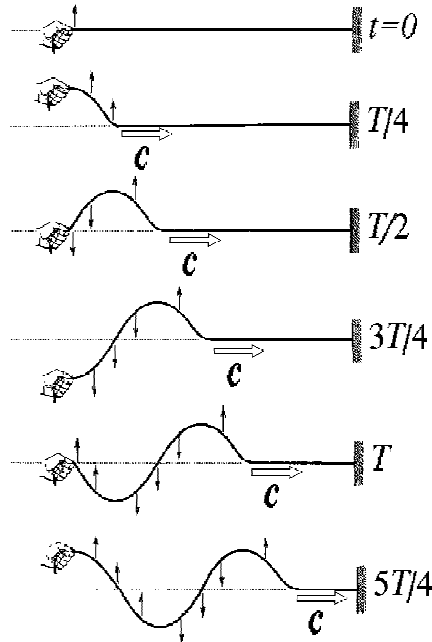


Figura 35.13

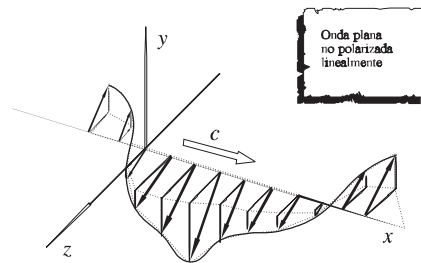


Figura 35.14

**Ejemplo I.- Onda plana polarizada.-** Una onda sinusoidal plana se propaga en la dirección positiva del eje  $x$  y está polarizada en un plano que forma un ángulo de  $30^\circ$  con el plano  $xy$ . Escribir la función de onda correspondiente.

El m.a.s. de amplitud  $A$  se puede descomponer en dos m.a.s. en fase en las direcciones de los ejes  $y$  y  $z$ , cuyas respectivas amplitudes serán

$$A_y = A \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 A \quad A_z = A \sin 30^\circ = 1/2 A$$

En consecuencia, la función de onda (vectorial) que describe la onda definida en el enunciado de este ejemplo será

$$y = \sqrt{3}/2 A \sin(\omega t - kx) \quad z = 1/2 A \sin(\omega t - kx)$$

que puede interpretarse como la superposición de dos ondas transversales en fase que se propagan con la misma velocidad ( $c = \omega/k$ ) en la dirección positiva del eje  $x$ .

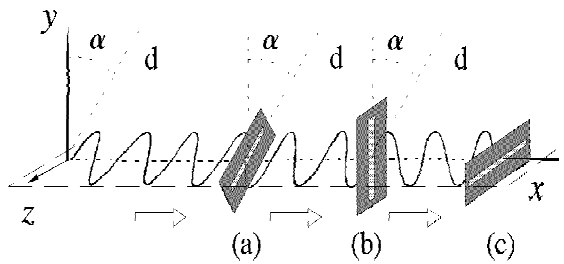


Figura 35.15

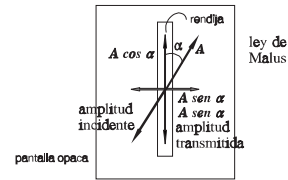


Figura 35.16

Continuando con el ejemplo anterior, una rendija (a) paralela a la dirección de polarización (d) no influirá en la propagación del movimiento ondulatorio a lo largo de la cuerda (Figura 35.15). En cambio, si disponemos de una rendija (c) perpendicular a la dirección de las oscilaciones, éstas no podrán propagarse a través de ella. En el caso de una rendija (b) que forme un ángulo  $\alpha$  con la dirección de las oscilaciones, el movimiento ondulatorio se transmitirá tan sólo parcialmente a través de la rendija, de modo que la presencia de ésta afectará la amplitud del movimiento ondulatorio, reduciéndola proporcionalmente al  $\cos \alpha$ , de acuerdo con la *ley de Malus*

$$A_y = A \cos \alpha \quad [35.42]$$

En efecto, el m.a.s. en la dirección (d) se puede descomponer en dos m.a.s. en direcciones perpendiculares entre sí, como se muestra en la Figura 35.16: uno paralelo a la rendija y otro perpendicular a la misma, en fase. El primero de ellos pasa libremente a través de la rendija, en tanto que el segundo queda bloqueado.

La polarización rectilínea representa un caso particularmente sencillo de polarización. Vimos en §15.6 que cuando se superponen dos m.a.s. perpendiculares entre sí y de la misma frecuencia el movimiento resultante tiene lugar sobre una trayectoria rectilínea, circular o elíptica, con la misma frecuencia,

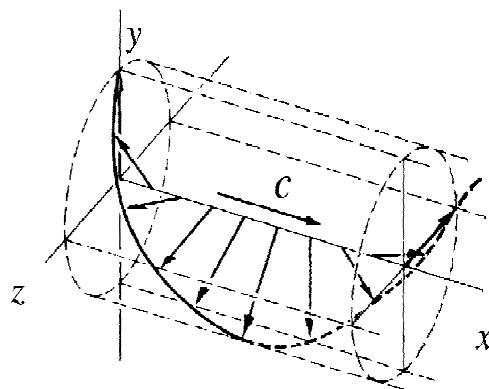


Figura 35.17

de acuerdo con el desfase relativo existente entre los m.a.s. que se superponen. Por consiguiente, cuando en un medio se propagan simultáneamente, en la misma dirección y con las mismas velocidades, dos ondas transversales polarizadas rectilíneamente en direcciones perpendiculares entre sí, de frecuencias idénticas y con un desfase adecuado, el resultado será una onda transversal en la que las partículas del medio material se mueven en trayectorias circulares o elípticas contenidas en planos perpendiculares a la dirección de propagación de las ondas, como se ilustra en la Figura 35.17. Decimos entonces que a través del medio se está propagando una *onda transversal polarizada circular o elípticamente*, según sea el caso.<sup>4</sup>

<sup>4</sup> Estas consideraciones tienen como objetivo principal facilitar el estudio de la polarización de la luz, asunto del que nos ocuparemos en las Lecciones dedicadas a la Óptica Física.



**§35.9. Velocidad de propagación de las ondas transversales.-** Dadas las propiedades del medio en el que se propaga una perturbación transversal, es posible calcular la velocidad de propagación de dicha perturbación a partir de los principios fundamentales de la mecánica newtoniana. Veamos algunos ejemplos.

**§35.9.a. Ondas transversales en una cuerda tensa.-** Sigamos centrando nuestra atención en la propagación de una perturbación transversal a lo largo de una cuerda tensa. Consideremos una cuerda larga y homogénea, de densidad lineal  $\mu$ , estirada bajo una tensión  $F$ . Inicialmente la cuerda está en reposo; en un instante dado, aplicamos al extremo izquierdo de la cuerda una pequeña sacudida transversal. Gracias a la acción recuperadora que proporciona la tensión de la cuerda, a lo largo de ésta se propagará una pequeña perturbación transversal con una cierta velocidad  $c$ , descrita por la función de onda

$y=y(t-x/c)$ . En la Figura 35.18 se muestra la forma que tendrá la cuerda al cabo de un cierto tiempo. Centremos nuestra atención en un elemento de cuerda, de longitud  $dx$  y masa  $dm=\mu dx$ , que presenta una elongación  $y$  en un instante dado. En cada uno de los extremos de dicho elemento actúa una fuerza tangencial  $F$ , como se muestra en la Figura 35.18. Como consecuencia de la curvatura de la cuerda, estas dos fuerzas, aunque del mismo módulo, no son directamente opuestas.

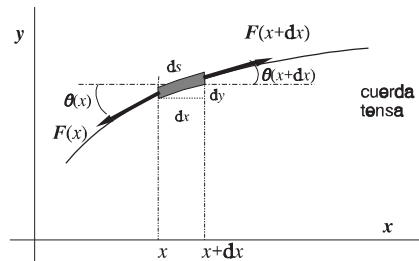


Figura 35.18

La componente transversal de la fuerza total que actúa sobre el elemento de cuerda es

$$dF_y = F (\text{sen}\theta_{x+dx} - \text{sen}\theta_x) \quad [35.43]$$

y como tan sólo estamos considerando desplazamientos transversales muy pequeños, de modo que la deformación de la cuerda no altere significativamente su tensión original, el ángulo  $\theta$  será pequeño, de forma que podemos reemplazar el  $\text{sen } \theta$  por la  $\text{tg } \theta$ ; esto es,

$$dF_y = F (\text{tg}\theta_{x+dx} - \text{tg}\theta_x) \quad [35.44]$$

y como  $\text{tg } \theta$  es simplemente la pendiente de la cuerda, que es igual a  $\partial y/\partial x$ , la expresión anterior se puede escribir como

$$dF_y = F \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right] = F \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) dx = F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \quad [35.45]$$

Esta fuerza debe ser igual al producto de la masa del elemento de cuerda ( $dm=\mu dx$ ) por la aceleración transversal del mismo ( $a_y=\partial^2 y/\partial t^2$ ), de modo que

$$F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad [35.46]$$

que es la *ecuación de onda* que describe la propagación de las perturbaciones transversales en una cuerda tensa y que, al compararla con la ecuación general de onda unidimensional [35.10], nos indica que

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad [35.47]$$

de modo que la velocidad de propagación no depende de la forma de la perturbación (con tal que ésta sea suficientemente pequeña), sino tan sólo de  $F$  (propiedad elástica del medio) y de  $\mu$  (propiedad inercial del medio).

Podría objetarse que en el análisis anterior hemos omitido cualquier referencia a las componentes longitudinales de las fuerzas que actúan en los extremos del elemento considerado, sin prestar atención a un posible movimiento longitudinal del mismo. Puesto que la componente longitudinal de la fuerza resultante sobre dicho elemento es

$$dF_x = F (\cos\theta_{x+dx} - \cos\theta_x) \quad [35.48]$$

y como, al tratarse de ángulos muy pequeños, es  $\cos\theta \approx 1$ , con mucha aproximación, de modo que, hasta aproximaciones de primer orden, serán  $\cos\theta_{x+dx} \approx \cos\theta_x$  y  $dF_x = 0$ . En consecuencia, no existe movimiento longitudinal.

**§35.9.b. Ondas transversales en una varilla.-** En los materiales sólidos pueden propagarse ondas transversales de naturaleza elástica, en virtud de la elasticidad de forma (rigidez) que tiende a evitar deslizamientos relativos entre los diversos elementos constituyentes del sólido.

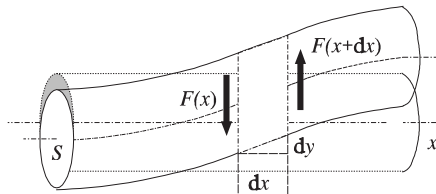


Figura 35.19

Para determinar la velocidad de propagación de las ondas transversales en un material sólido, consideraremos una barra que está representada en la Figura 35.19 en su estado sin distorsión. Si originamos una perturbación transversal en un punto de la barra (por ejemplo, golpeándola transversalmente con un martillo), ésta se propagará a lo largo de la misma, con una velocidad  $c$ .

Sea  $y$  el desplazamiento transversal de un elemento de barra de espesor  $dx$  y masa  $dm = \rho S_x dx$ , siendo  $\rho$  la densidad y  $S_x$  la sección de la barra, como se muestra en la Figura 35.19. Este desplazamiento debe ser función de  $x$  [i.e.,  $y = y(x)$ ], ya que si fuese constante se tendría un desplazamiento paralelo de la barra en su conjunto, sin deformación. La cantidad  $\gamma = \partial y / \partial x$  recibe el nombre de *deformación de cizalladura* (vide §27.10) y está relacionada con el *módulo de rigidez*,  $G$ , y con el *esfuerzo de corte*,  $\sigma_{xy} = F_y / S_x$ , por

$$\sigma_{xy} = \gamma G \Rightarrow F_y = S_x G \frac{\partial y}{\partial x} \quad [35.49]$$

siendo  $F_y$  la *fuerza de corte* que actúa sobre las caras seccionales del elemento considerado, como se ilustra en la Figura 35.19. La fuerza resultante sobre dicho elemento será

$$dF_y = S_x G \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right] = S_x G \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) dx = S_x G \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \quad [35.50]$$

Esta fuerza debe ser igual al producto de la masa del elemento ( $dm=\rho S_x dx$ ) por la aceleración del mismo ( $a_y=\partial^2 y/\partial t^2$ ), de modo que

$$S_x G \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = \rho S_x dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad [35.51]$$

que es la *ecuación de onda* que describe la propagación de una perturbación transversal en un sólido y que, al compararla con la ecuación de onda unidimensional [35.10] nos conduce a la expresión de la velocidad.

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad [35.52]$$

Así pues, la velocidad de propagación de las ondas transversales en los sólidos viene dada por [35.52], donde  $G$  es el módulo de rigidez y  $\rho$  la densidad del sólido.

**§35.9.c. Ondas de torsión.-** Las *ondas de torsión* son un tipo particular de ondas transversales que se producen cuando una varilla o un alambre tenso es sometido a oscilaciones de torsión (*vide* §28.2). La velocidad de propagación de estas ondas a lo largo de un alambre tenso o de una varilla viene dada por la expresión [35.52], con independencia de la forma de su sección transversal (*vide* Problema 35.21). No debe sorprendernos que las ondas transversales y las de torsión se propaguen con la misma velocidad, ya que ambos procesos tienen un mismo fundamento físico (esfuerzos de corte).

*En los fluidos no es posible la propagación de ondas transversales de naturaleza elástica*, pues, al carecer éstos de elasticidad de forma, no reaccionan ante los esfuerzos cortantes, de modo que si un estrato fluido experimenta un deslizamiento, éste no se transmite a los estratos fluidos vecinos. *En los fluidos sólo pueden propagarse ondas longitudinales*, gracias a la elasticidad de volumen (compresibilidad). Únicamente en la superficie libre de los fluidos pueden propagarse ondas transversales, pero éstas no son de naturaleza elástica, ya que intervienen la gravedad y la tensión superficial (*ondas capilares*).

**§35.10. Ondas longitudinales.-** Decimos que en un medio material se propaga una onda longitudinal cuando las partículas materiales que constituyen el medio oscilan en la misma dirección en que se propaga el movimiento ondulatorio. Las oscilaciones de las partículas pueden ser o no ser periódicas. Resulta obvio que *las ondas longitudinales no pueden estar polarizadas*; la polarización es una propiedad exclusiva de las ondas transversales.

Ilustraremos la producción de las ondas longitudinales con un ejemplo sencillo. En la Figura 35.20 se muestra un tubo largo, que contiene un fluido (*v.g.*, aire), al que se ha ajustado un émbolo en su extremo de la izquierda. Las líneas verticales dividen al fluido en tajadas delgadas, cada una de las cuales contiene la misma masa de fluido. En las regiones donde las líneas están relativamente próximas, la presión y la densidad del fluido son mayores que en aquéllas donde están más separadas. Consideraremos el fluido como un *medio continuo* y, de momento, no tendremos en cuenta que está constituido por partículas (moléculas) que se encuentran en continuo movimiento; *i.e.*, analizaremos la situación desde un punto de vista *macroscópico*.

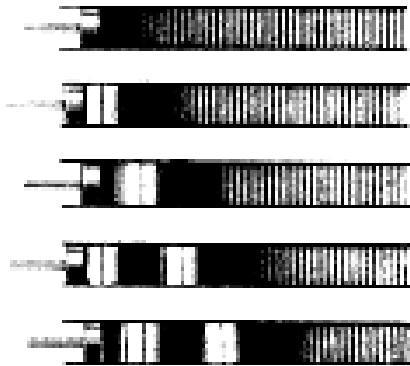


Figura 35.20

Supongamos que obligamos al émbolo a desplazarse periódicamente hacia adelante-atrás en la dirección del tubo. Cuando el émbolo avanza, la tajada de fluido que está en contacto con el émbolo se comprime, aumentando la presión y la densidad del fluido en ella por encima de sus valores normales. Este exceso de presión se transmite a lo largo de la columna fluida (pulso de compresión), avanzando con una cierta velocidad  $c$  (velocidad de propagación de la perturbación). Cuando el émbolo retrocede, la presión y la densidad en la tajada de fluido en contacto con el émbolo disminuyen por debajo de sus valores normales. Este defecto de presión se transmitirá a lo largo del tubo (pulso de enrarecimiento), avanzando con una velocidad  $c$ . Al desplazarse periódicamente el émbolo, hacia adelante y atrás, a lo largo de la columna fluida se propagarán un tren continuo de pulsos de compresión-enrarecimiento; esto es, se producirá una *onda de presión*. Si el movimiento del émbolo es un m.a.s., la onda longitudinal que se propaga a lo largo de tubo será sinusoidal (*i.e.*, armónica simple). Las ondas sonoras son de esta naturaleza.

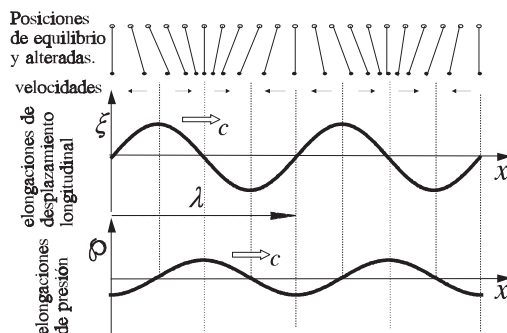


Figura 35.21

*i.e.*, en la dirección de propagación de la onda, que haremos coincidir con la dirección del eje  $x$ . Por conveniencia, representaremos el desplazamiento de cualquiera de estas partículas con respecto a su posición de equilibrio en el eje  $x$  (*i.e.*, la elongación) por la letra  $\xi$ ; *i.e.*,  $\xi \equiv \Psi$ . Entonces, la *función de onda longitudinal armónica de desplazamiento* la escribiremos en la forma

$$\xi = A \text{sen}(\omega t - kx) \quad [35.53]$$

teniendo las distintas magnitudes que aparecen en esta expresión el mismo significado que en la función de onda armónica transversal.

Como la forma de un medio material no cambia cuando es recorrido por una onda longitudinal, no resulta tan fácil visualizar la relación existente entre el movimiento de las partículas materiales

Las oscilaciones de una partícula determinada de fluido serán hacia adelante-atrás, en la misma dirección en que se propagan las perturbaciones de presión y con la misma amplitud que tengan las oscilaciones del émbolo. Si el movimiento del émbolo es un m.a.s., también lo serán los de todas y cada una de las partículas del fluido. El desplazamiento de cada partícula será hacia adelante-atrás, a lo largo del tubo,

y la propagación de una onda longitudinal como cuando las ondas transversales se propagan a lo largo de una cuerda. En la Figura 35.21 mostramos una instantánea de las posiciones de algunas partículas del medio situadas sobre una misma línea recta en la dirección de propagación de la onda longitudinal; pero sería deseable disponer de una "imagen dinámica" que nos muestre de una forma continua el movimiento de las partículas materiales. Para ello, sometemos a la consideración del lector la Figura 35.22. Para utilizar este diagrama, deberemos disponer de una tarjeta de unos  $10\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ , en la que haremos una rendija de unos  $6\text{ cm}$  de largo por  $1\text{ mm}$  de ancho, aproximadamente. Coloquemos la tarjeta sobre el diagrama, con la rendija en posición horizontal, y desplacémosla lentamente, de arriba hacia abajo, con velocidad constante. Los elementos de las curvas que aparecen en la rendija representan las oscilaciones de las partículas de un medio que sea recorrido por una onda longitudinal sinusoidal de izquierda a derecha. Obsérvese que cada partícula ejecuta un m.a.s. en torno a su posición de equilibrio y que las condensaciones y enrarecimientos se mueven de izquierda a derecha con velocidad constante. Obviamente, el movimiento ascendente de la tarjeta simulará una onda longitudinal que se propaga de derecha a izquierda.

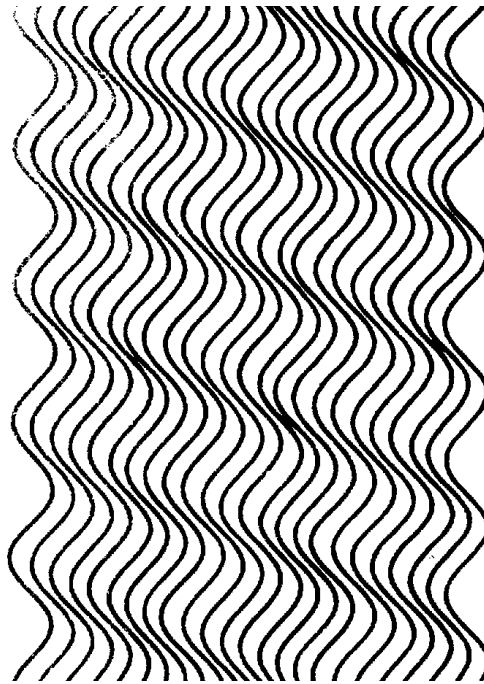


Figura 35.22.- Diagrama de ondas longitudinales.

**§35.11. Velocidad de propagación de las ondas longitudinales.-** En forma análoga a como hemos visto para las ondas transversales, la aplicación de los principios fundamentales de la mecánica newtoniana nos permitirá calcular la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en un medio material a partir del conocimiento de las características elásticas e inerciales de éste.

**§35.11.a. Ondas longitudinales en los sólidos.-** En los sólidos, puesto que las ondas longitudinales dan lugar a alargamientos y acortamientos de los elementos constituyentes del mismo, la velocidad de propagación de dichas ondas será función del *módulo de Young*. La velocidad de propagación de las ondas longitudinales en los sólidos varía según se trate de una varilla o de un medio indefinidamente extenso.

En una varilla la situación es relativamente simple, ya que la contracción transversal que acompaña a la propagación de la onda longitudinal puede producirse sin consecuencias notables con tal que la longitud de onda sea grande en comparación con las dimensiones transversales de la varilla (*i.e.*,  $\lambda \gg R$ ).

Para determinar la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en una varilla, supongamos que provocamos una perturbación longitudinal en uno de sus extremos (*v.g.*, golpeándolo con un martillo). Esta perturbación se propagará a lo largo de la varilla, con una velocidad  $c$ .

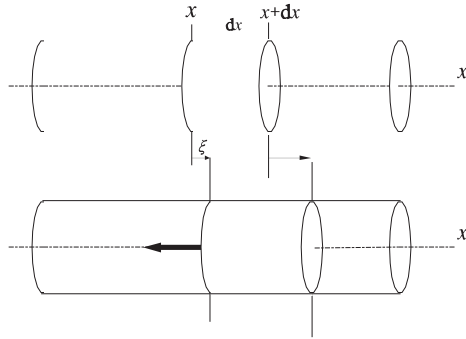


Figura 35.23

La región sombreada en la Figura 35.23a representa un elemento de varilla, de longitud  $dx$  y masa  $dm = \rho S dx$ , siendo  $\rho$  la densidad y  $S$  la sección de la varilla. En la Figura 35.23b se representa ese mismo elemento una vez que ha sido alcanzado por la perturbación. Sea  $\xi$  el desplazamiento longitudinal que experimenta una sección de la varilla de abscisa  $x$ . Este desplazamiento debe ser función de  $x$  (i.e.,  $\xi = \xi(x)$ ), ya que si fuese constante se tendría un desplazamiento rígido de la varilla en su conjunto. La cantidad  $\varepsilon = \partial\xi/\partial x$  recibe el nombre de *deformación longitudinal unitaria* (vide §27.3) y está relacionada con el *módulo de Young*,  $E$ , y con el esfuerzo longitudinal,

$\sigma_l = F/S$ , por

$$\sigma_l = \varepsilon E \quad \Rightarrow \quad F = SE \frac{\partial\xi}{\partial x} \quad [35.54]$$

siendo  $F$  la fuerza que actúa sobre las caras seccionales del elemento considerado, como se muestra en la Figura 35.23b. La fuerza resultante sobre dicho elemento será

$$dF = SE \left[ \left( \frac{\partial\xi}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left( \frac{\partial\xi}{\partial x} \right)_x \right] = SE \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\xi}{\partial x} \right) dx = SE \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} dx \quad [35.55]$$

Esta fuerza deberá ser igual al producto de la masa del elemento ( $dm = \rho S dx$ ) por la aceleración del mismo ( $a = \partial^2\xi/\partial t^2$ ), de modo que

$$SE \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} dx = \rho S dx \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \quad [35.56]$$

que es la *ecuación de onda* que describe la propagación de una perturbación longitudinal en una varilla y que, al compararla con la ecuación de onda unidimensional [35.10], nos permite escribir  $c^2 = E/\rho$ .

Así, en una varilla, de densidad  $\rho$  y módulo de Young  $E$ , el cálculo demuestra, y la experiencia confirma, que la velocidad de propagación de las ondas longitudinales viene dada por

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad [35.57]$$

Podemos comparar las velocidades de propagación de las ondas transversales y longitudinales en los materiales sólidos; como

$$c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad [35.58]$$

y por ser 
$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} < E \tag{35.59}$$

siendo  $\mu$  el coeficiente de Poisson, tenemos

$$\frac{c_1}{c_t} = \sqrt{2(1 + \mu)} > 1 \tag{35.60}$$

ya que  $\mu > 0$ , de modo que  $c_1 > c_t$ . Por lo tanto, *las ondas longitudinales se propagan siempre más rápidamente que las transversales*. Así, en el caso de una varilla de cobre ( $\mu=0.36$ ), se tiene  $c_1=1.65c_t$ .

Si las ondas longitudinales se propagan en un sólido infinitamente extenso, la contracción transversal engendra contratensiones que afectan a la velocidad de propagación de las ondas (*vide* Prob. 26.16) y en la expresión [35.57] intervendrá también el *coeficiente de Poisson*,  $\mu$ . En estas condiciones, es válida una fórmula algo más complicada

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}} \tag{35.61}$$

que el lector deducirá inmediatamente a partir del resultado del Prob. 27.16. En los materiales más habituales ( $\mu \approx 0.35$ ), la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en un sólido extenso supera en un 25% a la velocidad de dichas ondas en una varilla. Así, por ejemplo, para una varilla de cobre ( $\mu = 0.36$ ) es  $c=3780$  m/s, en tanto que para una masa de cobre de extensión indefinida es  $c = 4900$  m/s.

En los materiales sólidos extensos, las ondas longitudinales se propagan también con mayor velocidad que las transversales. Esta circunstancia permite localizar el *epicentro* de un terremoto. Un sismógrafo registrará primero la llegada de las ondas longitudinales originadas por el terremoto. Después, al cabo de un cierto tiempo  $\Delta t$ , registrará la llegada de las ondas transversales. El retraso  $\Delta t$  permite calcular la distancia a la que se encuentra del sismógrafo el epicentro del terremoto, del mismo modo que el intervalo de tiempo que transcurre desde que vemos el relámpago hasta que escuchamos el trueno que le acompaña nos informa acerca de la distancia a la que se produjo la descarga eléctrica atmosférica.

**§35.11.b. Ondas longitudinales en los fluidos.-** A diferencia de lo que ocurre con las ondas transversales, las ondas longitudinales se propagan en los fluidos gracias a la elasticidad de volumen (*compresibilidad*) de estos, por lo que es de esperar que la velocidad de propagación dependa del *módulo de compresibilidad*,  $K$ , del fluido.

Para determinar la velocidad,  $c$ , de las ondas longitudinales en un fluido, volveremos a considerar, por simplicidad, las ondas de presión que se propagan en un fluido contenido en un cilindro o tubo de sección

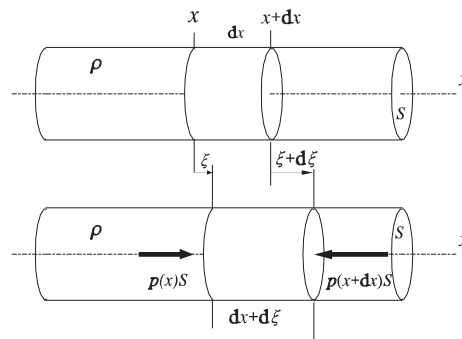


Figura 35.24

constante,  $S$ . Sean  $p_0$  y  $\rho_0$  la presión y la densidad del fluido en el estado de equilibrio, *i.e.*, no perturbado. En estas condiciones,  $p_0$  y  $\rho_0$  tienen el mismo valor en todo el volumen del fluido, de modo que son independientes de  $x$ . La región sombreada en la Figura 35.24a representa un elemento de fluido en equilibrio, de longitud  $dx$  y masa  $dm=\rho_0 S dx$ . En la Figura 35.24b se representa ese mismo elemento una vez que ha sido alcanzado por una perturbación de presión.

Como en el caso de la varilla, el desplazamiento longitudinal  $\xi$  que experimenta una sección de abscisa  $x$  es función de  $x$ , o sea,  $\xi=\xi(x)$ . El *cambio unitario de volumen* del elemento considerado será

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{S d\xi}{S dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad [35.62]$$

como se deduce inmediatamente a partir de la Figura 35.24b, y está relacionado con el *módulo de compresibilidad*,  $K$ , y con el incremento de presión o sobrepresión,  $\Delta p=p-p_0$ , en el elemento por

$$K = - \frac{\Delta p}{\Delta V/V} \quad \Rightarrow \quad \Delta p = p - p_0 = -K \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad p = p_0 - K \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad [35.63]$$

expresión que nos relaciona la presión en cualquier punto de la columna fluida con la "deformación" en ese punto. Como  $\xi=\xi(x)$ , será  $p=p(x)$ .

Ahora estableceremos la ecuación de movimiento del elemento fluido. El fluido situado a la izquierda del elemento lo empuja hacia la derecha con una fuerza  $p_x S$  y el situado a la derecha lo empuja hacia la izquierda con una fuerza  $p_{x+dx} S$ . Por lo tanto, la fuerza resultante en la dirección positiva del eje  $x$  será

$$dF = (p_x - p_{x+dx}) S = -S dp = -S \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx \quad [35.64]$$

y como de [35.63] sigue (por derivación) que

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -K \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad [35.65]$$

al sustituir en [35.64] se tiene  $dF = SK \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$  [35.66]

Esta fuerza deberá ser igual al producto de la masa del elemento ( $dm=\rho_0 S dx$ ) por su aceleración ( $a=\partial^2 \xi/\partial t^2$ ); esto es,

$$SK \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = \rho_0 S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{K} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad [35.67]$$

que es la *ecuación de onda* que nos describe la propagación de las perturbaciones longitudinales en la columna fluida y que nos permite expresar la velocidad de las mismas en la forma  $c^2=K/\rho_0$ .

Así pues, la velocidad de propagación de las ondas longitudinales o de presión en un fluido viene dada por

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \quad [35.68]$$

siendo  $K$  el módulo de compresibilidad (propiedad elástica) y  $\rho_0$  la densidad (propiedad inercial) del fluido.



Las variaciones de presión y de densidad en los fluidos también obedecen a ecuaciones de onda como la [35.67]; esto es,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{K} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{K} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \qquad [35.69]$$

por lo que las ondas longitudinales en los fluidos también pueden ser consideradas como *ondas de presión y ondas de densidad*, que se propagan, como es obvio, con la velocidad  $c^2=K/\rho_0$ .

**§35.12. Carácter adiabático del movimiento ondulatorio longitudinal.-**

Sabemos que la compresión de un fluido ocasiona un aumento de su temperatura, a no ser que el calor sea eliminado por algún procedimiento para mantener constante la temperatura (transformación isotérmica). Cuando avanza una onda longitudinal a través de un fluido, las regiones que en un instante dado están comprimidas tendrán una temperatura superior que las que están enrarecidas. Así pues, se dan las condiciones para que tenga lugar una conducción calorífica desde cada zona comprimida a las zonas enrarecidas vecinas. El flujo calorífico, *i.e.*, la cantidad de calor transmitida por unidad de tiempo y por unidad de superficie, depende de la *conductividad térmica* del medio y de la distancia entre una zona comprimida y las zonas enrarecidas contiguas (*media longitud de onda*). Ahora bien, a las frecuencias ordinarias (20 a 20000 Hz, para las ondas sonoras audibles), y aun para los mejores conductores térmicos conocidos, la longitud de onda suele ser demasiado grande y la conductividad térmica demasiado pequeña como para que pueda haber un intercambio calorífico apreciable. Por consiguiente, *las compresiones y enrarecimientos son adiabáticos, en vez de isotérmicos*.

Hay dos módulos de compresibilidad: el *isotérmico*,  $K_T$ , y el *adiabático*,  $K_Q$ . De acuerdo con lo expuesto en el párrafo anterior, en la expresión [35.68], que nos expresa la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en un fluido, el módulo que deberemos utilizar es el adiabático,  $K_Q$ , de modo que

$$c = \sqrt{\frac{K_Q}{\rho}} \qquad [35.70]$$

La definición rigurosa del módulo de compresibilidad adiabático es

$$K_Q = - \left( \frac{dp}{dV/V} \right)_Q = - V \left( \frac{dp}{dV} \right)_Q \qquad [35.71]$$

En el caso de un gas perfecto, la relación entre la presión  $p$  y el volumen  $V$  en un proceso adiabático viene expresada por la *fórmula de Poisson*,

$$pV^\gamma = \text{cte.} \qquad [35.72]$$

donde  $\gamma$  es el *coeficiente adiabático* ( $\gamma=C_p/C_v$ ). Diferenciando esta expresión, se obtiene

$$V^\gamma dp + \gamma p V^{\gamma-1} dV = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \qquad [35.73]$$

o sea,

$$- V \left( \frac{dp}{dV} \right)_Q = \gamma p \qquad [35.74]$$

y sustituyendo esta última expresión en la [35.71] se tiene

$$K_Q = \gamma p \quad [35.75]$$

Así pues, la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en un gas perfecto vendrá dada por

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad [35.76]$$

Además, como la ecuación de estado de los gases perfecto es

$$pV = nRT = \frac{m}{M} RT \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\rho}{M} RT \quad [35.77]$$

siendo  $R = 8.3143 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kmol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  la constante universal de los gases perfectos,  $M$  la masa molecular (molécula-kilogramo) y  $T$  la temperatura absoluta, la exp. [35.76] puede escribirse en la forma

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad [35.78]$$

donde, puesto que  $\gamma$  y  $M$  son constantes para un gas dado, vemos que  $c \propto \sqrt{T}$ .

**Ejemplo II.-** Calcular la velocidad del sonido en el aire a la temperatura de  $27^\circ\text{C}$ . Datos:  $\gamma=1.4$ ;  $M=28.8 \text{ kg/kmol}$ .

Puesto que la temperatura absoluta será  $T=27+273=300 \text{ K}$ , al sustituir valores en la expresión [35.78], se obtiene

$$c = \sqrt{\frac{1.4 \times 8.31 \cdot 10^3 \times 300}{28.8}} = 348 \text{ m/s}$$

En el estudio anterior no hemos tenido en cuenta la estructura molecular del fluido, ya que lo hemos considerado como si se tratase de un medio continuo. En realidad, las oscilaciones que constituyen una onda longitudinal que se propaga en un fluido están superpuestas al movimiento térmico desordenado de las moléculas del fluido.

En los gases, los espacios intermoleculares son grandes en comparación con los diámetros moleculares. A la presión atmosférica, el *recorrido libre medio* de las moléculas del aire es del orden de  $10^{-7} \text{ m}$  ( $=0.1 \mu\text{m}$ ), mientras que la amplitud de desplazamiento para un sonido débil puede ser tan sólo del orden de  $10^{-11} \text{ m}$  ( $=0.1 \text{ \AA}$ ), esto es, la diezmilésima parte ( $1/10000$ ) de aquella cantidad<sup>5</sup>. Por otra parte, la cantidad de movimiento y la energía de una molécula sólo será transferida a otra una vez que la primera haya recorrido el espacio vacío existente entre ellas y se produzca la colisión. De esta argumentación

<sup>5</sup> Este es el orden de magnitud de las dimensiones atómicas.

sencilla, ¿podríamos esperar que la velocidad del sonido fuese, en algún caso, mayor que la velocidad media molecular en un gas?

A la luz de las anteriores consideraciones, cabe comparar cada porción del gas en el que se está propagando una onda sonora con un enjambre de mosquitos; se observa que el enjambre en su conjunto oscila ligeramente, mientras que cada uno de los mosquitos se mueve extensamente a través del enjambre, de forma aparentemente desordenada.

**§35.13. Ondas superficiales en los líquidos.-** Sin duda alguna, el movimiento ondulatorio que nos resulta más familiar es el que se observa en la superficie de una masa de agua, producido por el viento o alguna otra perturbación. Estas ondas, que pueden verse fácilmente, se utilizan comúnmente como ejemplo de movimiento ondulatorio en los cursos elementales de Física. Sin embargo, como veremos a continuación, son el peor ejemplo posible, ya que tales ondas presentan todas las complicaciones que una onda puede tener. El tratamiento matemático de tales ondas es considerablemente más complicado que el utilizado hasta ahora en los ejemplos anteriormente descritos y por ello lo omitiremos. En su lugar, nos conformaremos con una discusión cualitativa de este tipo de ondas, resaltando algunos aspectos de gran interés.

Para comprender la mecánica de las ondas superficiales en los líquidos, consideraremos un canal muy largo, de sección transversal rectangular y con paredes sin rozamiento, que contiene una profundidad  $h$  de un líquido de densidad  $\rho$  y tensión superficial  $\sigma$ . La superficie libre del líquido en equilibrio será plana y horizontal. Al desplazar horizontalmente hacia adelante y atrás, con un m.a.s., la placa plana (**P**) situada en el extremo izquierdo del canal (Figura 35.25), se producirán desplazamientos del líquido tanto longitudinales como transversales, y estas perturbaciones se propagarán a lo largo del canal, de modo que cada elemento del fluido se desplazará de su posición de equilibrio horizontal y verticalmente.

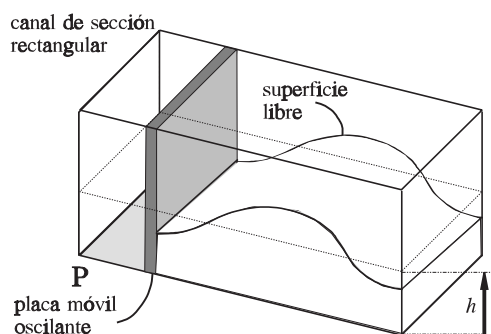


Figura 35.25

Realmente, la perturbación no está restringida a la superficie libre del líquido, sino que se extiende a todo el volumen del mismo. Cada volumen elemental o partícula fluida describirá una trayectoria cerrada contenida en un plano paralelo a la longitud del canal, como se ilustra en la Figura 35.26. Estas trayectorias son circulares o elípticas, con el eje mayor horizontal, de modo que el movimiento de cada partícula fluida puede considerarse como la superposición de dos m.a.s. de la misma frecuencia, en direcciones perpendiculares y desfasados  $90^\circ$  (*vide* §15.6a). En consecuencia, la onda puede considerarse como la superposición de una onda longitudinal y otra transversal, de distintas amplitudes, desfasadas  $90^\circ$ .

Si la longitud de onda es suficientemente pequeña (*i.e.*, si  $\lambda \ll h$ ), ambas amplitudes serán casi iguales en la superficie libre del líquido, y las trayectorias de las partículas superficiales serán circulares. La amplitud de ambas componentes

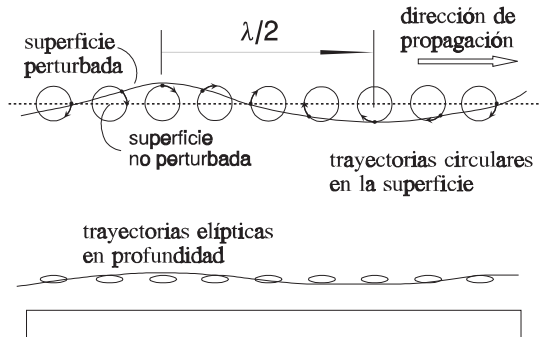


Figura 35.26

disminuye al aumentar la distancia a la superficie libre, pero la componente vertical disminuye más rápidamente que la horizontal. En el fondo, la componente vertical será nula y la oscilación es totalmente horizontal.

La fuerza restauradora que actúa sobre cada partícula fluida alejada de su posición de equilibrio se debe en parte a la diferencia de presiones debidas a las variaciones de

profundidad (*efecto gravitatorio*) y, también en parte, a los efectos de la tensión superficial debidos a la curvatura de la superficie libre del líquido (*efecto capilar*).

En vista de las complicaciones anteriormente descritas, se comprenderá que la ecuación diferencial resultante para estas ondas no es exactamente del tipo [35.10], sino algo más complicada. Sin embargo, dicha ecuación diferencial se satisface para ondas armónicas simples, en sus componentes transversal y longitudinal, que se propagan con una velocidad dada por

$$c = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}\right) \operatorname{tgh} \frac{2\pi h}{\lambda}} \quad [35.79]$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $\lambda$  es la longitud de onda.

El aspecto más interesante que cabe destacar en la expresión anterior es que *la velocidad de propagación no sólo depende de las propiedades del medio ( $\rho, \sigma$ ), sino que también depende de la longitud de onda*. Como la frecuencia está relacionada con la velocidad y la longitud de onda a través de  $v=c/\lambda$ , resulta que *la velocidad de propagación depende de la frecuencia*.

Cuando la velocidad de fase de un movimiento ondulatorio que se propaga en un medio material depende de la longitud de onda o de la frecuencia, decimos que se trata de un *medio dispersivo*. Si un movimiento ondulatorio resultante de la superposición de varias ondas armónicas penetra en un medio dispersivo, la onda se distorsiona o dispersa, ya que cada una de sus componentes viaja con distinta velocidad. Esta dependencia de la velocidad con la longitud de onda se presenta en muchos tipos de ondas. Así, por ejemplo, un prisma óptico descompone o dispersa la "luz blanca" en los diferentes colores de su espectro, ya que el vidrio es un medio dispersivo para las ondas luminosas.

Cuando la profundidad  $h$  es muy grande en comparación con la longitud de onda, *i.e.*, cuando  $2\pi h/\lambda \gg 1$ , será  $\operatorname{tgh}(2\pi h/\lambda) \approx 1$ , de modo que la expresión [35.79] puede escribirse como

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}} \quad [35.80]$$

con suficiente aproximación. La dependencia existente entre  $c$  y  $\lambda$  indica que la función  $c(\lambda)$  debe tener un mínimo, como se observará en la Figura 35.27, donde hemos representado gráficamente  $c$  frente a  $\lambda$  para el caso del agua. El lector comprobará fácilmente que

$$\lambda_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \qquad c_{\min} = \sqrt[4]{\frac{4g\sigma}{\rho}} \qquad [35.81]$$

Como en el agua es  $\sigma \approx 72 \text{ dyn/cm}$  y  $\rho \approx 1 \text{ g/cm}^3$ , serán  $\lambda_{\min} \approx 1.7 \text{ cm}$  y  $c_{\min} \approx 23 \text{ cm/s}$ , de modo que no existirá onda alguna que se propague en la superficie del agua con una velocidad inferior a 23 cm/s.

Cuando la longitud de onda es muy pequeña ( $\lambda \ll \lambda_{\min}$ , según Lord Kelvin), el término que predomina en la expresión [35.80] es el segundo, de modo que la velocidad de fase viene dada, con suficiente aproximación, por

$$c = \sqrt{\frac{2\pi \sigma}{\rho \lambda}} \qquad [35.82]$$

en la que no aparece el efecto gravitatorio representado por  $g$ . Estas ondas reciben el nombre de *ondas capilares* y son tales que a mayor longitud de onda

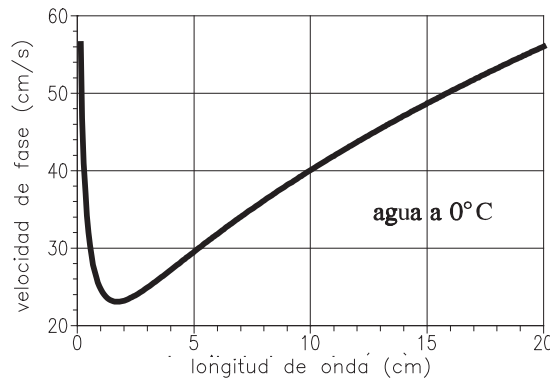


Figura 35.27

corresponde una menor velocidad de fase. Estas ondas o rizos son las que se forman sobre la superficie de las aguas tranquilas cuando sopla la brisa o se la somete a vibraciones de alta frecuencia y pequeña amplitud.

Por el contrario, cuando la longitud de onda es suficientemente grande ( $\lambda \gg \lambda_{\min}$ ), predomina el primer término de la expresión [35.80], pudiéndose escribir

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \qquad [35.83]$$

Se habla entonces de *ondas de gravedad*. En estas ondas, la velocidad de fase es independiente de las propiedades del líquido, ya que ni la densidad ni la tensión superficial del mismo aparecen en la expresión [35.83]. Obsérvese que, en estas ondas de gravedad, a mayor longitud de onda corresponde mayor velocidad de fase. Estas ondas se originan, por ejemplo, cuando sopla un viento fuerte y continuado sobre la superficie del agua (oleaje).

Por último, consideraremos el caso límite que se presenta cuando la longitud de onda es muy grande en comparación con la profundidad, *i.e.*,  $\lambda \gg h$ . En estas circunstancias, la cantidad  $2\pi h/\lambda$  será muy pequeña, de modo que  $\text{tgh}(2\pi h/\lambda) \approx 2\pi h/\lambda$  y como también el término  $2\pi\sigma/\rho\lambda$  será muy pequeño, la expresión [35.79] se reduce a

$$c \approx \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \frac{2\pi h}{\lambda}} = \sqrt{gh} \qquad [35.84]$$

de modo que la velocidad de fase es independiente, no solamente de las propiedades del líquido, sino también de la longitud de onda; esto es, *no hay dispersión*. Puesto que, según la expresión anterior, al disminuir la profundidad disminuye también la velocidad de fase, cuando el oleaje se

aproxima a la orilla de una playa de pendiente suave, la velocidad con que avanzan las olas se retarda gradualmente hasta anularse, eliminándose en gran medida la reflexión de las mismas, al contrario de lo que ocurre en un acantilado.

**§35.14. Energía en el movimiento ondulatorio.-** En los diferentes tipos de ondas que hemos descrito en esta lección podemos apreciar una característica común: en todas ellas subyacen ciertos movimientos de átomos o moléculas del medio material, pero dichos átomos o moléculas permanecen en promedio en sus posiciones de equilibrio. Así pues, el movimiento ondulatorio no implica la propagación o traslación de materia, sino del estado de movimiento de ésta. El movimiento ondulatorio representa una *condición dinámica que se propaga a través del medio*, pero como es costumbre describir tales condiciones por medio de los conceptos de cantidad de movimiento y de energía, podemos afirmar que

en un movimiento ondulatorio se propagan o transmiten cantidad de movimiento y energía.

Así pues, una de las características más conspicuas del movimiento ondulatorio es la de transportar energía a través del medio en el que se propaga, desde la posición en la que se introduce la energía en el proceso de creación de las ondas, hasta el punto donde esta energía es absorbida como consecuencia de la interacción de las ondas con algún sistema material.

En este epígrafe utilizaremos sistemas mecánicos sencillos para poner de manifiesto las características de validez general asociadas con este transporte de energía.

**§35.14.a. Ondas unidimensionales (planas).-** Calcularemos el contenido de energía y su transporte en las ondas mecánicas más sencillas (*i.e.*, las ondas transversales en

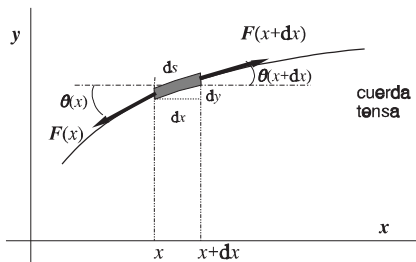


Figura 35.28

una cuerda tensa), aunque los resultados que obtendremos serán de validez general.

Consideremos una cuerda de densidad lineal  $\mu$ , sometida a una tensión  $F$ , por la que se propaga una perturbación de forma arbitraria. Centremos nuestra atención en un elemento de cuerda, de longitud  $dx$  y masa  $dm = \mu dx$ , que presenta una elongación y en un instante dado, como se muestra en la Figura 35.28. Como la velocidad (transversal) del elemento viene dada por  $v = (\partial y / \partial t)$ , su

energía cinética será

$$dE_k = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} \mu dx \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad [35.85]$$

de modo que la *densidad lineal de energía cinética*, que representaremos por  $\mu_k$ , vendrá dada por

$$\mu_k = \frac{dE_k}{dx} = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad [35.86]$$

Por otra parte, la energía potencial almacenada en el elemento proviene del alargamiento que experimenta cuando pasa por él la perturbación. La longitud del elemento deformado es

$$ds = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} dx \approx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad [35.87]$$

ya que  $\partial y/\partial x$  (i.e., la pendiente) se supone muy pequeña, y el incremento de longitud que experimenta viene dado por

$$dl = ds - dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad [35.88]$$

El trabajo realizado durante el proceso de alargamiento, teniendo en cuenta que  $|F|=cte.$ , será igual al incremento de la energía potencial, que vendrá dado por

$$dE_p = F dl = \frac{1}{2} F \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad [35.89]$$

por lo que la *densidad lineal de energía potencial*, que designaremos por  $\mu_p$ , será

donde hemos tenido en cuenta que  $F=\mu c^2$ , siendo  $c$  la velocidad de propagación de la perturbación.

Consideremos ahora una función de onda arbitraria,  $y(x,t)=f(ct-x)$ , entonces

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{df(u)}{du} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = c \frac{df(u)}{du} \quad [35.91]$$

con  $u=ct-x$ . Por tanto, las expresiones [35.86] y [35.90] se convierten en

$$\mu_k = \frac{1}{2} \mu c^2 \left( \frac{df}{du} \right)^2 \quad \mu_p = \frac{1}{2} \mu c^2 \left( \frac{df}{du} \right)^2 \quad [35.92]$$

de modo que

$$\mu_k = \mu_p \quad [35.93]$$

La *densidad lineal de energía* (total), que designaremos por  $\mu_E$ , será la suma de las densidades lineales de energía cinética y potencial; esto es,

$$\mu_E = \mu_k + \mu_p \quad \Rightarrow \quad \mu_E = 2\mu_k = 2\mu_p \quad [35.94]$$

de modo que es posible obtener la densidad lineal de energía calculando el doble de la densidad de energía cinética o potencial.

En el caso de una **onda sinusoidal**, descrita por la función

$$y(x,t) = A \text{ sen } (\omega t - kx) \quad [35.95]$$

calculamos sus derivadas parciales

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -k A \cos(\omega t - kx) \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \omega A \cos(\omega t - kx) \quad [35.96]$$

las sustituimos en las exp. [35.86] y [35.90], teniendo en cuenta que  $\omega=ck$ , para obtener

$$\mu_k = \mu_p = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad [35.97]$$

de modo que

$$\mu_E = \mu \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad [35.98]$$

Obsérvese que las funciones  $\mu_k(x,t)$ ,  $\mu_p(x,t)$  y  $\mu_E(x,t)$  satisfacen la ec. dif. de onda [35.10]; efectivamente, representan *ondas de energía* que se propagan con la velocidad  $c=\omega/k$ .

Puesto que el valor medio de la función  $\cos^2 u$  es igual a 1/2, los valores medios de las densidades lineales de energía, en el caso de una onda sinusoidal, serán

$$\langle \mu_k \rangle = \langle \mu_p \rangle = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2 \quad \Rightarrow \quad \langle \mu_E \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \quad [35.99]$$

Podemos expresar el transporte de energía a lo largo de la cuerda en términos de la energía que transporta la onda por unidad de tiempo a través de una sección fija de la cuerda (Figura 35.29) en el instante  $t$ , cuando la onda pasa por esa sección. Transcurrido un tiempo  $dt$ , la onda habrá avanzado una distancia  $dx=cdt$ . En ese lapso de tiempo, la parte de la onda, de longitud  $dx$ , que se encontraba a la izquierda de la sección fija, avanza y pasa por dicha sección, transportando a través de ella una cantidad de energía

$$dE = \mu_E dx \quad [35.100]$$

o sea, una energía por unidad de tiempo

$$\frac{dE}{dt} = \mu_E \frac{dx}{dt} = \mu_E c \quad [35.101]$$

La energía que pasa por unidad de tiempo a través de una sección fija de la cuerda se denomina *flujo de energía* a través de esa sección y lo designaremos por  $\Phi$ , de modo que

$$\Phi = \mu_E c \quad [35.102]$$

esto es,

el flujo de energía es igual al producto de la densidad lineal de energía por la velocidad con que se propaga la energía.

Obsérvese que el flujo de energía tiene dimensiones de *potencia* y sus unidades son *watios* (W) en el S.I..

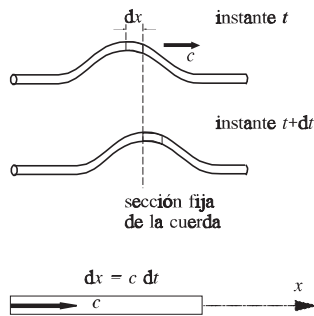


Figura 35.29



Si se trata de un **pulso individual** único, el flujo de energía a través de una sección determinada sólo es distinto de cero cuando la densidad de energía es distinta de cero en esa posición, *i.e.*, mientras que está pasando el pulso.

En el caso de una **onda sinusoidal**, al sustituir la exp. [35.98] en la [35.102], tenemos

$$\Phi(x,t) = \mu c \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad [35.103]$$

de modo que en todo momento habrá un flujo de energía a través de una sección cualquiera; sin embargo, ese flujo no es constante, ya que varía con el tiempo. La energía transportada por unidad de tiempo promediada a un ciclo de oscilación, *i.e.*, el *flujo energético promedio*, será

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{2} \mu c \omega^2 A^2 \quad [35.104]$$

El hecho de que la rapidez de transporte de energía o flujo de energía sea proporcional al cuadrado de la frecuencia y al cuadrado de la amplitud no es una propiedad exclusiva de las ondas transversales en la cuerda, sino que es una característica de todas las ondas armónicas cualquiera que sea su naturaleza.

Resulta interesante evaluar el flujo de energía a lo largo de una cuerda tensa por otro procedimiento. Para ello, volveremos a centrar nuestra atención en el elemento de cuerda que se muestra en la Figura 35.28. La componente transversal,  $F_y$ , de la tensión  $F$  de la cuerda, ejercida por el elemento de la izquierda sobre el elemento dado será

$$F_y = -F \sin\theta \approx -F \tan\theta = -F \frac{\partial y}{\partial x} \quad [35.105]$$

de modo que la *potencia transmitida* por el elemento de la izquierda al elemento dado será

$$P = F_y v = -F \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \quad [35.106]$$

y representa el flujo de energía a lo largo de la cuerda.

Para analizar con más detalle la situación, consideraremos el caso de una onda sinusoidal, definida por la función [35.95] y sus derivadas [35.96], de modo que, al sustituir en [35.106] y teniendo en cuenta que  $F = \mu c^2$  y  $k = \omega/c$ , se obtiene

$$P = \mu c \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad [35.107]$$

donde la presencia del factor  $\cos^2(\omega t - kx)$  nos asegura que  $P(x,t)$  es siempre positivo, aunque varía con el tiempo en una posición dada. Además, puesto que  $P(x,t) = P(\omega t - kx)$ , podemos estar seguros de que la función  $P(x,t)$  satisface la ecuación de onda y, por consiguiente, corresponde a una *onda de energía* que se propaga con la velocidad  $c = \omega/k$ .

El valor medio de la potencia o flujo de energía, al promediar a un periodo o ciclo de oscilación, será

$$\langle P \rangle = \mu c \omega^2 A^2 \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle P \rangle = \frac{1}{2} \mu c \omega^2 A^2 \quad [35.108]$$

que es la misma expresión [35.104] encontrada anteriormente.

En los razonamientos anteriores hemos evitado hacer referencia a la sección  $S$  de la cuerda, pues hemos preferido expresarnos en términos de *densidades lineales*

de masa ( $\mu$ ) y de energía ( $\mu_k$ ,  $\mu_p$  y  $\mu_E$ ), que son los usuales en la descripción de las ondas en la cuerda. Sin embargo, es conveniente que hagamos intervenir las *densidades volúmicas* (simplemente, *densidades*) de masa ( $\rho$ ) y de energía ( $\rho_k$ ,  $\rho_p$  y  $\rho_E$ ) en las expresiones [35.85]-[35.108]. Para ello, basta que tengamos en cuenta que

$$\mu = \rho S \quad \mu_k = \rho_k S \quad \dots \quad [35.109]$$

De este modo, las expresiones que resultan de sustituir [35.109] en [35.85]-[35.108] ganan en generalidad, ya que serán aplicables para todo tipo ondas que se propaguen en dos o en tres dimensiones del espacio, tales como las ondas superficiales en el agua y las ondas sonoras emitidas en todas las direcciones del espacio.

Así, procediendo del modo indicado, la expresión [35.102] se convierte en

$$\Phi = \rho_E S c \quad [35.110]$$

o bien 
$$\langle \Phi \rangle = \langle \rho_E \rangle S c \quad [35.111]$$

si consideramos los valores medios del flujo y de la densidad de energía.

Resulta útil definir la *intensidad de un movimiento ondulatorio* como el *flujo o potencia media transmitida a través de la unidad de área normal a la dirección de propagación de la onda*; designándola por  $I$ , es,

$$I = \frac{\langle \Phi \rangle}{s} = \langle \rho_E \rangle c \quad [35.112]$$

y representa la energía que fluye por unidad de tiempo y por unidad de superficie normal a la dirección de propagación. Naturalmente, la *intensidad* se expresa en  $W/m^2$  en el S.I. de unidades.

En el caso de ondas sinusoidales, como  $\langle \rho_E \rangle \propto \omega^2 A^2$ , la intensidad también será proporcional al cuadrado de la frecuencia y al cuadrado de la amplitud

La relación [35.112] es importante y válida en general no solamente para cualquier movimiento ondulatorio, sino también para cualquier proceso que implique transporte de energía. Nos dice que

la intensidad del movimiento ondulatorio en una posición dada es igual al producto de la densidad media de energía en dicha posición por la velocidad con que es transportada esa energía.

**§35.14.b. Ondas esféricas.-** Consideremos ahora el caso de una onda sinusoidal tridimensional que se propaga en un medio homogéneo e isotrópico, de densidad  $\rho$ . Éste puede ser el caso de las ondas sonoras emitidas por un foco de pequeñas dimensiones. Si además la fuente emite isotrópicamente, los frentes de onda serán esféricos y el flujo de energía será el mismo en todas las direcciones del espacio.

Sea  $\langle P \rangle$  la potencia media de la fuente. Entonces, en las condiciones antes enunciadas, el flujo promedio de energía  $\langle \Phi \rangle$  será el mismo a través de cualquier superficie esférica de radio  $r$  centrada en la fuente, de modo que

$$\langle P \rangle = \langle \Phi \rangle = \frac{1}{2} \rho S c \omega^2 A^2 \quad [35.113]$$

donde hemos tenido en cuenta la expresión [35.108] en la que hemos sustituido  $\mu = \rho S$ . Puesto que  $S = 4\pi r^2$  es la superficie de la esfera, podemos escribir

$$\langle P \rangle = \langle \Phi \rangle = 2\pi \rho c r^2 \omega^2 A^2 \quad [35.114]$$

de modo que, como en el caso de la onda unidimensional, el flujo de energía es proporcional al cuadrado de la frecuencia y al cuadrado de la amplitud, siendo este resultado válido en general; pero, además, al menos aparentemente, también lo es al cuadrado de la distancia al foco.

Parece haber una contradicción en esto último, puesto que en definitiva el flujo de energía es igual a la potencia suministrada por el foco, y éste suministra una determinada potencia media (constante o no) en cada ciclo. Lo que ocurre es que esta potencia se tiene que distribuir, a medida que avanza la onda, sobre frentes de onda cada vez más extensos. En el caso que estamos considerando, la intensidad, que designaremos por  $I$ , vendrá dada por

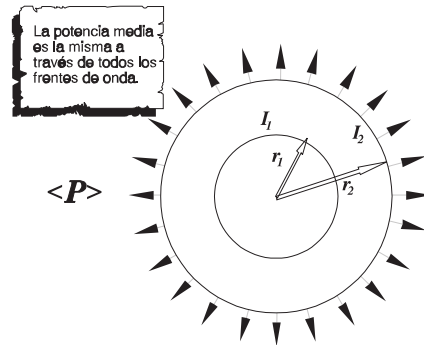


Figura 35.30

$$I = \frac{\langle \Phi \rangle}{S} = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 A^2 \quad [35.115]$$

Para una onda de frecuencia dada, cualquiera que sea su forma y naturaleza, la intensidad es proporcional al cuadrado de su amplitud, esto es,

$$I \propto A^2 \quad [35.116]$$

Si consideramos un frente de onda esférico de radio  $r_1$  y otro de radio  $r_2$  (Figura 35.30), los flujos de potencia a través de ellos serán

$$\langle \Phi_1 \rangle = 4\pi r_1^2 I_1 \quad \langle \Phi_2 \rangle = 4\pi r_2^2 I_2 \quad [35.117]$$

respectivamente; y, si no hay absorción de energía en el medio, serán  $\langle P_1 \rangle = \langle P_2 \rangle$ , de modo que

$$r_1^2 I_1 = r_2^2 I_2 \quad \Rightarrow \quad I \propto \frac{1}{r^2} \quad [35.118]$$

por lo que, en las ondas esféricas, *la intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco emisor*. Como  $I \propto A^2$ , deducimos que

$$A \propto \frac{1}{r} \quad [35.119]$$

resultando que las amplitudes son inversamente proporcionales a la distancia al foco emisor.

En las ondas planas puede tomarse  $r_1 = r_2 = \infty$ , de modo que  $I_1 = I_2$  y  $A_1 = A_2$ . Si no hay absorción de energía en el medio atravesado, las ondas planas mantienen constantes la intensidad y la amplitud.

**§35.15. Absorción.-** La experiencia nos enseña que, en general, el medio que es recorrido por la onda absorbe parte o toda la energía transportada por aquélla, lo que implica una disminución de la intensidad del movimiento ondulatorio y, por tanto, de su amplitud. Este fenómeno es semejante a lo que ocurre en el caso del movimiento armónico amortiguado (*vide Lec. 13*) y recibe el nombre de *absorción*.

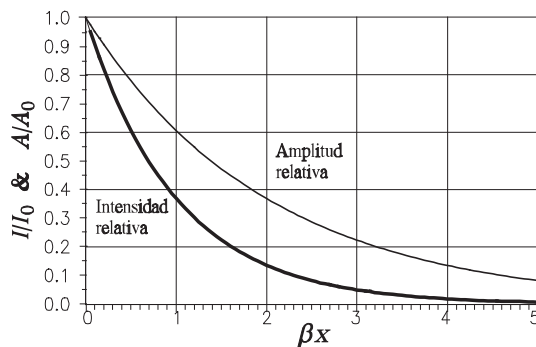


Figura 35.31

Limitándonos al caso de ondas planas que se propagan en la dirección del eje  $x$ , la experiencia nos indica que la disminución en la intensidad del movimiento ondulatorio por unidad de recorrido, *i.e.*,  $-dI/dx$ , es proporcional a la intensidad  $I$ , de modo que podemos escribir

$$-\frac{dI}{dx} = \beta I \quad [35.120]$$

donde  $\beta$  es una constante de proporcionalidad que depende de la naturaleza del medio y de la naturaleza y la frecuencia de la onda, principalmente; esta constante recibe el nombre de *coeficiente de absorción* y sus unidades corresponden a la inversa de una longitud (*i.e.*,  $m^{-1}$ , en el S.I.). Integrando la expresión anterior obtenemos

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\beta \int_0^x dx \quad \Rightarrow \quad I = I_0 e^{-\beta x} \quad [35.121]$$

de modo que, como consecuencia de la absorción, la intensidad del movimiento ondulatorio se atenúa exponencialmente con el espacio recorrido (*ley de LAMBERT*), como se muestra en la Figura 35.31 (trazo grueso).

La amplitud de la onda disminuye conforme esta avanza en el medio absorbente y, como  $I \propto A^2$ , tenemos

$$A^2 = A_0^2 e^{-\beta x} \quad \Rightarrow \quad A = A_0 e^{-\left(\frac{\beta}{2}\right)x} \quad [35.122]$$

de modo que el coeficiente de absorción efectivo para la amplitud (Figura 35.31, trazo fino) es la mitad del correspondiente a la intensidad (o a la energía).

Si  $\beta$  fuese muy pequeño, podría despreciarse la absorción. En ocasiones interesa que la absorción sea grande, para lo cual se utilizan materiales muy absorbentes que se interponen en el trayecto de las ondas. Así, por ejemplo, a fin de reducir el nivel de ruido procedente del exterior en las salas de ensayo de los conservatorios y en los

estudios de grabación (*aislamiento acústico*), se construyen las paredes con materiales muy absorbentes, tales como corcho, lana de vidrio, poliuretano expandido, ... (*vide* §40.7).

En el caso de ondas circulares y esféricas (y en general de ondas no planas), se superponen la disminución de la intensidad del movimiento ondulatorio debida a la absorción y con la asociada al alejamiento de los frentes de onda al foco emisor. Así, en el caso de la propagación de ondas esféricas en un medio absorbente homogéneo e isótropo será

$$I \propto \frac{e^{-\beta r}}{r^2} \quad [35.123]$$

donde  $r$  es la distancia del frente de onda al foco emisor (*vide* Problema 35.40).

## Problemas

**NOTA:** Salvo indicación en contrario, la velocidad del sonido en el aire se tomará igual a 340 m/s.

**35.1.-** Una onda plana está definida por la función de onda  $\Psi = \Psi(ax+bt)$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes positivas. ¿Cuál será la velocidad de fase? ¿En qué dirección y sentido se propaga la onda?

**35.2.-** Las ondas sonoras procedentes de un altavoz se difunden de forma casi uniforme en todas las direcciones del espacio cuando sus longitudes de onda son grandes en comparación con el diámetro del altavoz. Por el contrario, cuando sus longitudes de onda son pequeñas, gran parte de la energía acústica se dirige hacia adelante. Calcular, para un altavoz de 20 cm de diámetro, la frecuencia para la cual la longitud de onda del sonido en el aire es: **a)** 1/10 del diámetro del altavoz, **b)** igual al diámetro del altavoz y **c)** 10 veces el diámetro del altavoz.

**35.3.-** Una onda sinusoidal transversal avanza a lo largo de una cuerda tensa con una amplitud de 0.5 cm, una longitud de onda de 10 cm y una frecuencia de 2 Hz. **a)** Determinar la velocidad de fase, la frecuencia angular y el vector de onda. **b)** Escribir la función de onda.

**35.4.-** La función de onda que describe una onda transversal que se propaga en una cuerda tensa cuya densidad lineal es de 20 g/m viene dada por

$$y = 0.2 \cos(1.75x - 628.32t)$$

donde  $x$  e  $y$  se miden en centímetros y  $t$  se mide en segundos. **a)** Determinar la amplitud, la longitud de onda, la frecuencia y la velocidad de propagación de la onda. **b)** Dibujar la forma de la cuerda en los instantes  $t=2.5$  ms y  $t=5.0$  ms. **c)** Calcular la tensión de la cuerda.

**35.5.-** Una onda sinusoidal se propaga a lo largo de una cuerda tensa. El punto de la cuerda de abscisa  $x=0$  oscila según la ecuación  $y = A \sin(\omega t)$ , donde  $A=0.3$  cm y  $\omega=10\pi$  rad/s. El punto de abscisa  $x=5.0$  cm oscila según la ecuación  $y = A \sin(\omega t - \pi/4)$ . **a)** ¿Cuál es la frecuencia de la onda? **b)** Suponiendo que la onda avanza en el sentido positivo del eje  $x$  y que  $\lambda > 5.0$  cm, determinar los valores de la longitud de onda y de la velocidad de fase. **c)** Escribir la función de onda correspondiente a esta onda progresiva.

**35.6.-** Consideremos una onda plana armónica, cuya velocidad de fase sea 32 m/s, su amplitud 3.2 cm y su frecuencia 60 Hz, que se propaga en la dirección positiva del eje  $x$ . Supongamos que en  $x=0$ , en el instante  $t=0$ , la elongación

sea máxima y positiva. **a)** Escribir la función de onda. ¿Cuál es la longitud de onda? **b)** Calcular la elongación, velocidad y aceleración de un punto de abscisa  $x=15.3$  m en el instante  $t=2.6$  s.

**35.7.-** Uno de los extremos de un muelle muy largo, en posición horizontal, está unido a un vibrador que proporciona una frecuencia de 25 Hz. A lo largo del muelle avanza un tren continuo de ondas longitudinales en el que se observa que la distancia entre dos rarefacciones consecutivas es de 24 cm y que el máximo desplazamiento de cualquiera de las espiras del muelle es de 5 mm. Supongamos que las ondas avanzan en el sentido positivo del eje  $x$ , que el vibrador está en  $x=0$  y que el desplazamiento para  $x=0$  y  $t=0$  sea nulo. **a)** Determinar la velocidad de las ondas. **b)** Escribir la función de onda. **c)** Determinar la elongación en función del tiempo de una espira situada a 10 cm del vibrador.

**35.8.-** Consideremos una cuerda tensa recorrida por una onda transversal. Demostrar que la velocidad de un punto cualquiera de la cuerda, en un instante dado, es igual al producto, cambiado de signo, de la velocidad de fase por la pendiente de la cuerda en ese punto en ese instante.

**35.9.-** Las siguientes funciones son de la forma  $f(ct-x)$ :

$$y = A(ct-x) \quad y = A(ct-x)^2$$

$$y = A(ct-x)^{1/2} \quad y = A \ln(ct-x)$$

donde  $A$  es una constante. Explicar por qué estas funciones no son útiles en el movimiento ondulatorio.

**35.10.- Pulso gaussiano.-** La función de onda

$$\Psi(x,t) = A e^{-B(ct-x)^2}$$

describe un pulso que avanza con una velocidad  $c$  en la dirección positiva del eje  $x$ . **a)** Para verificarlo, represéntese gráficamente la función  $\Psi(x,t)$  en los instantes  $t=0$  y  $t=t$ . **b)** Por sustitución directa, compruébese que la función  $\Psi(x,t)$  es solución de la ecuación diferencial de onda unidimensional. **c)** Encontrar la distribución de las velocidades de los puntos del medio en el instante  $t=0$ . Hacer una gráfica de dicha distribución.

**35.11.-** Un pulso de onda transversal que avanza a lo largo de una cuerda tensa viene descrito por la función

$$y(x,t) = \frac{A^3}{A^2 + (Bx - Ct)^2}$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son constantes. **a)** Dibujar la forma del pulso para  $t=0$ . ¿Cuál es la amplitud del pulso? **b)** Determinar la velocidad del pulso y su sentido de movimiento. **c)** Encontrar la distribución de las velocidades transversales de los puntos de la cuerda en el instante  $t=0$ . Hacer una gráfica de dicha distribución.

**35.12.- a)** Demostrar que una onda esférica isotrópica satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Psi) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\Psi)$$

**b)** Verificar que la solución de esta ecuación de onda es de la forma

$$\Psi = \frac{A}{r} f(r - ct)$$

siendo  $A$  una constante.

**35.13.-** Describir el estado de polarización de las ondas planas que corresponden a las siguientes funciones de onda:

$$\mathbf{a)} \quad \begin{cases} \Psi_y = 2A \sin(\omega t - kx) \\ \Psi_z = 3A \sin(\omega t - kx) \end{cases}$$

$$\mathbf{b)} \quad \begin{cases} \Psi_y = A \sin(\omega t - kx) \\ \Psi_z = A \cos(\omega t - kx) \end{cases}$$

$$\mathbf{c)} \quad \begin{cases} \Psi_y = 3A \sin(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}) \\ \Psi_z = 2A \sin(\omega t - kx) \end{cases}$$

$$\mathbf{d)} \quad \begin{cases} \Psi_y = A \sin(\omega t - kx + \frac{\pi}{3}) \\ \Psi_z = A \sin(\omega t - kx - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} \Psi_y = 3A \text{sen}(\omega t - kx) \\ \Psi_z = 2A \text{cos}(\omega t + kx) \end{cases}$$

**35.14.-** Escribir las funciones de onda que describen las siguientes ondas transversales que se propagan en la dirección positiva del eje  $x$ . **a)** Onda polarizada linealmente cuyo plano de polarización forma un ángulo de  $60^\circ$  con el plano  $xy$ . **b)** Ídem  $135^\circ$  con el plano  $xy$ . **c)** Onda con polarización circular derecha. **d)** Onda con polarización elíptica izquierda, con su eje mayor paralelo al eje  $y$  y de longitud triple que el eje menor.

**35.15.-** Un aro circular de cuerda homogénea se hace girar rápidamente con una velocidad angular constante  $\omega$ , de manera que se tensa formando una circunferencia de radio  $R$ . En un momento dado se forma un rizo en la cuerda. **a)** ¿Con qué velocidad se propagará el rizo por la cuerda? **b)** ¿Bajo qué condiciones podrá el rizo permanecer estacionario respecto a un observador estacionario?

**35.16.-** Una cuerda homogénea, de longitud  $L$  y masa  $m$ , cuelga verticalmente sujeta firmemente por su extremo superior. **a)** Expresar la velocidad de propagación de un pulso transversal a lo largo de la cuerda en función de la distancia  $x$  respecto al extremo inferior (libre de la cuerda). **b)** Calcular el tiempo que empleará dicho pulso en recorrer toda la cuerda. **c)** Supongamos que sacudimos transversalmente el extremo inferior de la cuerda, con una frecuencia  $\nu$ , de modo que se genere una onda sinusoidal a lo largo de la cuerda. Expresar la longitud de onda,  $\lambda$ , en función de  $x$ .

**35.17.- Ondas transversales de gran amplitud en una cuerda tensa.** En §35.9a hemos supuesto que la amplitud era suficientemente pequeña como para hacer uso de la aproximación  $\text{sen } \theta \approx \text{tg } \theta$ . Supongamos ahora que la deformación que experimenta la cuerda no sea suficientemente pequeña como para seguir haciendo uso de tal aproximación, sino que, por el contrario, sea aceptable esta otra

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{tg } \theta}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}} \approx \text{tg } \theta - \frac{1}{2} \text{tg}^3 \theta$$

Demstrar que, en estas condiciones, la ecuación diferencial de las ondas transversales en la cuerda tensa se convierte en

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left[ 1 - \frac{3}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Obsérvese que *esta ecuación no es lineal* y que se reduce a la [35.46] cuando  $(\partial y / \partial x)^2$  es despreciable.

**35.18.-** Un cable uniforme y flexible, de 10 m de longitud y 6 kg de peso, cuelga verticalmente con su extremo superior firmemente sujeto a un soporte. Del extremo inferior del cable se cuelga una pesa de 6 kg. Se golpea transversalmente el cable cerca de su extremo inferior. Calcular el tiempo que empleará la perturbación resultante en llegar al extremo superior del cable.

**35.19.-** Calcular la velocidad de propagación de las ondas transversales y longitudinales en una barra de acero. DATOS:  $E = 20 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,  $G = 7.8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$  y  $\rho = 7.87 \text{ g/cm}^3$ .

**35.20.-** ¿A qué esfuerzo tensor debería estar sometido un hilo de acero para que la velocidad de las ondas longitudinales en el mismo fuese igual a la de las ondas transversales? ¿Es posible conseguirlo? DATO: Esfuerzo tensor de ruptura para el acero,  $\sigma_{\text{máx}} = 50 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ .

**35.21.- Ondas de torsión en una barra.** Una barra de sección circular constante, de radio  $R$ , densidad  $\rho$  y módulo de rigidez  $G$  se tuerce como consecuencia de la aplicación de un momento de torsión en torno a su eje longitudinal (*vide* §28.1). **a)** Demostrar que, si es  $\phi$  el ángulo de torsión en una sección de abscisa  $x$ , el momento de torsión viene dado por la expresión

$$M = \frac{1}{2} \pi R^4 G \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

**b)** Demostrar que la velocidad de propagación de las ondas de torsión a lo largo de la barra viene dada por

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

**35.22.- Ondas longitudinales en un muelle.** Supongamos que se propaga una perturbación longitudinal a lo largo de un muelle estirado. Sea  $\xi$  el desplazamiento experimentado por una sección del muelle de abscisa  $x$ . **a)** De-

mostrar que la tensión del muelle varía a lo largo del mismo y viene dada por la expresión

$$F = kL \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

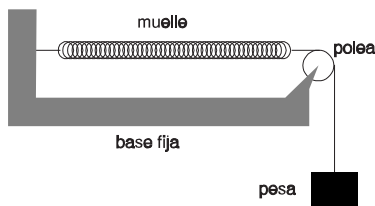
siendo  $k$  la constante elástica y  $L$  la longitud natural del muelle. **b)** Demostrar que la fuerza resultante sobre un elemento del muelle de longitud  $dx$  es

$$dF = kL \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

**c)** Demostrar que la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en el muelle es

$$c = L \sqrt{\frac{k}{m}}$$

siendo  $m$  la masa del muelle.



Prob. 35.23

**35.23.-** Un muelle homogéneo tiene una longitud natural de 5 m y pesa 250 g. El muelle se mantiene estirado en posición horizontal, mediante el dispositivo que se muestra en la figura, observándose que se alarga 6.0 cm cuando se le cuelga una pesa de 300 g de su extremo libre. Determinar la velocidad de las ondas longitudinales en el muelle.

**35.24.-** Determinar la variación de la velocidad del sonido en el aire por unidad de aumento de temperatura para 20°C.

**35.25.-** El valor experimental de la velocidad de las ondas longitudinales en el agua a 20°C es de 1486 m/s. Calcular el valor del módulo de compresibilidad adiabático del agua y compararlo con el del módulo de compresibilidad isotérmico (vide Tabla 26.II).

**35.26.- Ondas transversales en una membrana tensa.** Consideremos una membrana delga-

da y tensa, sometida a una tensión  $\tau$  por unidad de longitud. Si la membrana experimenta una deformación en un determinado punto de su superficie, esta deformación se propagará por la membrana, originando una onda superficial (bidimensional). Sea  $xy$  el plano definido por la membrana en equilibrio y consideremos un elemento de superficie de lados  $dx$  y  $dy$  sobre la membrana deformada. **a)** Demostrar que la fuerza neta transversal que actúa sobre dicho elemento es

$$dF_z = \tau \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) dx dy$$

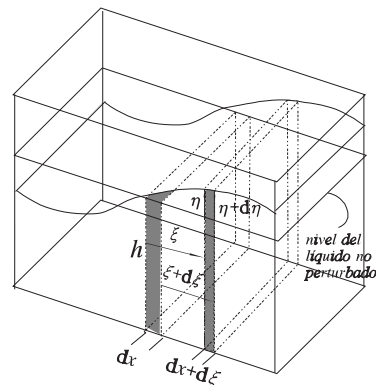
**b)** Demostrar que la ecuación de onda que describe la propagación de la perturbación sobre la membrana es

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\sigma}{\tau} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

siendo  $\sigma$  la densidad superficial de la membrana. **c)** Demostrar que la velocidad de propagación de las ondas transversales en la membrana tensa viene dada por

$$c = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}$$

**35.27.- Ondas superficiales de gran longitud de onda en un canal poco profundo.** Consideremos un canal de profundidad  $h$  y anchura  $L$ . Si perturbamos la superficie del líquido con ondas de pequeña amplitud y gran longitud de



Prob. 35.27



onda (i.e.,  $\lambda \gg h$ ), una sección vertical genérica del líquido, de espesor  $dx$ , experimentará desplazamientos en las direcciones horizontal y vertical como se muestra esquemáticamente en la figura. Suponiendo que el líquido sea incompresible, demostrar que las ecuaciones de onda que describen la propagación de las perturbaciones longitudinales y transversales en el líquido son

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{gh} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{1}{gh} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

respectivamente, que corresponden a dos ondas que se propagan con la misma velocidad,  $c^2 = gh$ , en concordancia con el resultado [35.84] obtenido en el texto bajo circunstancias similares.

**35.28.- En la playa.** Nos encontramos en la playa observando el oleaje. Tomamos nuestro reloj y contamos las olas que rompen en la playa; encontramos un promedio de 12 olas por minuto. Sabemos que el tiempo meteorológico se ha mantenido constante en la región durante varias horas, de modo que podemos considerar las olas en estado estacionario. **a)** Calcular la longitud de onda de las olas en el océano abierto, a unos 30 o 40 km de la playa. **b)** Las crestas de las olas que ahora rompen en la playa, ¿cuánto han viajado en la última hora?

**35.29.- Pulso triangular.** Durante un intervalo de tiempo  $\tau$ , desplazamos transversalmente el extremo libre de una cuerda tensa con una velocidad constante  $v$ ; durante el intervalo  $\tau$  siguiente, lo volvemos a llevar a su posición inicial con la misma velocidad constante. **a)** Dibujar la forma del pulso de onda que se propaga a lo largo de la cuerda. **b)** Calcular la energía que transporta el pulso. **c)** Demostrar que dicha energía es igual al trabajo total realizado por la fuerza transversal que se ha aplicado al extremo libre de la cuerda.

**35.30.-** Uno de los extremos de una cuerda horizontal está firmemente unido a un vibrador accionado eléctricamente a una frecuencia de 110 Hz. La cuerda pasa por una polea y lleva colgado de su extremo libre una pesa de 2 kg. La cuerda mide 1.20 m y pesa 24 g. **a)** Determinar la velocidad de las ondas transversales en la cuerda. **b)** ¿Cuál es la longitud de onda? **c)** Si la amplitud de las vibraciones del vibrador es de 2 mm, calcular la potencia instantánea y la potencia media que suministra el vibrador.

**35.31.- Densidades de energía de ondas sinusoidales.** Consideremos una onda sinusoidal que se propaga a lo largo de una cuerda, de densidad lineal  $\mu$ , que está sometida a una tensión  $F$ . Demostrar que las energías cinética y potencial por longitud de onda son iguales y vienen dadas por  $\frac{1}{2}\pi\mu c\omega A^2$ , siendo  $c$  la velocidad de propagación,  $\omega$  la frecuencia angular y  $A$  la amplitud de las oscilaciones.

**35.32.- Densidades de energía en una varilla para ondas longitudinales.** Consideremos una onda longitudinal que se propaga a lo largo de una varilla de densidad  $\rho$ , área de sección recta  $S$  y módulo de Young  $E$ . **a)** Demostrar que la densidad de energía cinética es  $\frac{1}{2}\rho S(\partial\xi/\partial t)^2$  y la de energía potencial es  $\frac{1}{2}ES(\partial\xi/\partial x)^2$  y que ambas densidades son iguales. **b)** Para el caso de una onda sinusoidal, demostrar que la densidad de energía total viene dada por  $\rho S\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx)$ , i.e., *onda de energía* que se propaga con la velocidad  $c = \omega/k$ . **c)** Demostrar que las energías cinética y potencial por longitud de onda son iguales y vienen dadas por  $\frac{1}{2}\pi\rho S c\omega A^2$ , siendo  $c$  la velocidad de propagación,  $\omega$  la frecuencia angular y  $A$  la amplitud de las oscilaciones. Comparar los resultados con los obtenidos en el epígrafe §35.14 para las ondas transversales en una cuerda tensa.

**35.33.- Onda de radio.** Calcular la densidad de energía en una onda de radio, a 500 km de una fuente de 50 kW, suponiendo que los frentes de onda sean esféricos (propagación isotrópica).

**35.34.- Energía de un pulso triangular.** Un pulso transversal de amplitud  $A$  avanza en el sentido positivo del eje  $x$ , a lo largo de una cuerda de densidad  $\mu$ , sometida a una tensión  $F$ . El pulso se describe por la función de onda

$$y(x,t) = \begin{cases} A \left( 1 - \frac{|ct-x|}{l} \right) & \text{para } |ct-x| < l \\ 0 & \text{para } |ct-x| > l \end{cases}$$

**a)** Dibujar la forma del pulso. **b)** Determinar la densidad lineal de energía que transporta el pulso. **c)** Ídem la energía total. **d)** Calcular el flujo de energía  $\Phi(x,t)$ . **e)** Para un valor fijo de  $x$ , integrar el valor de  $\Phi(x,t)$  para  $-\infty < t < +\infty$  y verificar que el pulso lleva, al pasar por cualquier punto  $x$  de la cuerda, la energía total calculada en el apartado c).

**35.35.- Chillidos del albatros.** Un náufrago que se encuentra en un bote salvavidas apenas alcanza a oír los chillidos de un ídem que

vuela a gran altura sobre el océano, a una distancia de 3 km en línea recta del náufrago. Como veremos en una lección posterior, el umbral de audición del oído humano es  $10^{-12} \text{ W/m}^2$ , aproximadamente. **a)** Suponiendo que el albatros emitiese los sonidos en forma isotrópica, calcular la potencia de sus chillidos. **b)** Supongamos que el ave emita sus chillidos 1000 veces al día, con una duración de 1 s cada uno, ¿cuánta energía emite diariamente en forma de ondas sonoras?

**35.36.- Tren AVE.** Un observador, que se encuentra cerca de las vías del *tren de alta velocidad (AVE)*, en campo abierto, percibe el sonido del silbato de la locomotora, que circula con velocidad constante alejándose del observador, con una intensidad de  $10 \mu\text{W/m}^2$ , en el instante en que ésta se encuentra a una distancia de 40 m del observador. Transcurridos 6 s, el observador percibe el mismo sonido con una intensidad de  $100 \text{ nW/m}^2$ . ¿Cuál es la velocidad del tren? **NOTA:** Despreciar la absorción del sonido en el aire.

**35.37.-** Una cuerda muy larga y flexible, de masa  $\mu$  por unidad de longitud, está estirada horizontalmente sometida a una tensión  $F$ . Sujetamos con la mano el punto medio de la cuerda y la sacudimos hacia arriba y abajo imprimiéndole un m.a.s. con una amplitud  $A$  y una frecuencia  $\nu$ . En estas condiciones se generan ondas transversales que recorren la cuerda en ambas direcciones. Antes de que el movimiento se complique como consecuencia de las reflexiones en los extremos lejanos de la cuerda, calcular: **a)** la potencia en función del tiempo que debe suministrar la mano y **b)** el valor medio de dicha potencia.

**35.38.- Fuente lineal.** Una fuente lineal emite ondas cilíndricas que se expanden en un medio isotrópico y no absorbente. Determinar la dependencia con la distancia a la fuente de la intensidad y de la amplitud del movimiento ondulatorio.

**35.39.- Absorción de ondas planas.** Una onda plana se propaga en un medio material absorbente, siendo  $\beta$  el coeficiente de absorción. Calcular cuanto debe recorrer la onda en el medio para que su intensidad se reduzca **a)** a la mitad, **b)** a 1/8, **c)** a 1/10 y **d)** a 1/1000 de su valor inicial.

**35.40.- Absorción de ondas esféricas.** Consideremos la propagación de una onda esférica en un medio absorbente, homogéneo e isotrópico a partir de un foco puntual. Sean  $P$  y  $\beta$  la potencia de la fuente y el coeficiente de absorción del medio, respectivamente. **a)** Demostrar

que la intensidad a una distancia  $r$  de la fuente viene dada por

$$I = \frac{I_0 r_0^2}{r^2} e^{-\beta(r-r_0)}$$

siendo  $I_0$  la intensidad a una distancia  $r_0$ . **b)** Demostrar que

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} e^{-\beta r}$$

**35.41.-** Una onda esférica se propaga en un medio absorbente ( $\beta = 0.0231 \text{ m}^{-1}$ ), homogéneo e isotrópico. La intensidad de la onda a una distancia de 10 m de la fuente es de  $100 \text{ nW/m}^2$ . **a)** ¿Cuál será la intensidad a una distancia de 20 m de la fuente? **b)** ¿Ídem a 100 m? **c)** Calcular la potencia de la fuente. **d)** Evaluar los apartados anteriores en ausencia de absorción a fin de resaltar la importancia de ésta.