Exámen de Ampiación de Matemáticas
Segundo curso. Informática de Gestión
Fecha: **Grupo**:

---

1. Sea $f(x) = \ln(x) - x + 2$.

   (i) Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ admite exactamente dos raíces reales, una de las cuáles es mayor que 3 y llamaremos s.

   (ii) Encuentra una función $g(x)$ que tenga a s por punto fijo y satisfaga las condiciones del Teorema global del punto fijo en $[3, 4]$.

   (iii) Halla 3 iteraciones con el método iterativo del punto fijo que define la función g que has hallado en el apartado anterior. Demuestra que existe un punto de inicio x_0 con el que se puede asegurar que el método converge a s y tómalo para hacer las tres iteraciones.

   (iv) Halla 2 iteraciones con un método iterativo que tenga convergencia cuadrática para aproximar a s. Demuestra que existe un punto de inicio x_0 con el que se puede asegurar que el método converge a s y tómalo para hacer las dos iteraciones.

2. Dado el sistema de ecuaciones

$$2x_1 - x_2 = 5$$
$$x_1 + 2x_2 = 5$$

   descomponer la matriz A de coeficientes del sistema en la forma $A = M - N$, donde $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Si consideramos el método iterativo

$$\vec{X}^{n)} = M^{-1}N\vec{X}^{n-1)} + M^{-1}B, \quad n = 1, 2 \ldots$$

   tomando como vector de inicio $\vec{X}^{0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ¿Es convergente el método?. En caso afirmativo, aproximar la solución del sistema mediante dicho método, utilizando como criterio de parada que $\left\|\vec{X}^{n+1)} - \vec{X}^{n)}\right\|_1 < 1$.

3. Se considera la función: $f(x) = x^3 - x - 1$ en el intervalo $[0, 2]$.

(a) Dividir el intervalo en 2 partes iguales y averiguar el polinomio interpolador que pasa por los tres nodos obtenidos en dicha división. Deducir el error máximo (en valor absoluto) que se puede cometer al estimar el valor de f por medio de dicho polinomio en 0.5.

(b) Dividir el intervalo en 9 partes iguales y averiguar el polinomio interpolador que pasa por los 10 nodos obtenidos en dicha división.

4. Sea $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$. Averiguar el número mínimo de veces que hay que dividir el intervalo $(0, 4)$ para que al estimar el valor de $\int_0^4 f(x)\, dx$ usando las fórmula compuesta de los trapecios el error (en valor absoluto) sea inferior a 10^{-4}.

5. Se desea aproximar $\int_{-1}^1 f(x)\, dx$ mediante la fórmula $a_0 f(-1) + a_1 f(0) + a_2 f\left(\frac{1}{2}\right)$. Determinar los coeficientes a_0, a_1 y a_2 para que la fórmula tenga grado de exactitud al menos 2.

6. Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} y' &= yz - x, \quad x \in (0, 0.2) \\ z' &= z + x, \quad x \in (0, 0.2). \end{aligned}$$

Sabiendo que $y(0) = 0, z(0) = 1$.

(a) Con paso $h = 0.1$, determinar una aproximación mediante el método de Euler de $y(0.2)$ y $z(0.2)$.

(b) Con paso $h = 0.1$, determinar una aproximación mediante el método de Runge-Kutta clásico de $y(0.1)$ y $z(0.1)$.