Exámen de Ampiación de Matemáticas
Segundo curso. Informática de Gestión
Fecha: **Grupo**:

---

1. Sea $f(x) = \ln(x) - x + 2$.

   (i) Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ admite exactamente dos raíces reales, una de las cuáles es mayor que 3 y llamaremos s.

   (ii) Encuentra una función $g(x)$ que tenga a s por punto fijo y satisfaga las condiciones del Teorema global del punto fijo en $[3, 4]$.

   (iii) Halla 3 iteraciones con el método iterativo del punto fijo que define la función g que has hallado en el apartado anterior. Demuestra que existe un punto de inicio x_0 con el que se puede asegurar que el método converge a s y tómalo para hacer las tres iteraciones.

   (iv) Halla 2 iteraciones con un método iterativo que tenga convergencia cuadrática para aproximar a s. Demuestra que existe un punto de inicio x_0 con el que se puede asegurar que el método converge a s y tómalo para hacer las dos iteraciones.

2. (i) Enuncia una condición sobre la matriz de coeficientes de un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas que asegure que el método de Gauss-Seidel converge.

   (ii) Determinar una solución aproximada del sistema de ecuaciones

   $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 &= 4 \end{aligned}$$

   mediante el método de Gauss-Seidel partiendo de $\vec{X}^{0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se utilizará como criterio de parada que $\left\| \vec{X}^{n+1)} - \vec{X}^{n)} \right\|_\infty < 0.05$.

3. Sea $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$.

   (i) Hallar el polinomio interpolador Hermite en los nodos $x_0 = -1$ y $x_1 = 1$.

   (ii) Se divide el intervalo $[-1, 1]$ en dos partes iguales y se interpola con el polinomio de Lagrange en los tres nodos resultantes. Deducir el error máximo (en valor absoluto) que se puede cometer al estimar el valor de f por medio de dicho polinomio interpolador en 0.5

(iii) Hallar el polinomio interpolador de Lagrange con los nodos resultantes de dividir el intervalo $[-1, 1]$ en cuatro partes iguales.

4. Un spline cúbico natural o con frontera libre está definido por

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = ax + bx^2 & \text{si } 0 \le x < 1, \\ S_1(x) = c(x-1) + (x-1)^2 + d(x-1)^3 & \text{si } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

   Si S interpola los datos $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(2, 1)$. Halla a, b, c y d usando la definición de spline.

5. Sea $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$. Averiguar el número mínimo de veces que hay que dividir el intervalo $(0, 4)$ para que al estimar el valor de $\int_0^4 f(x)\,dx$ usando las fórmula compuesta de los trapecios el error (en valor absoluto) sea inferior a 10^{-4}.

6. Se desea aproximar $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ mediante la fórmula $a_0 f(-1) + a_1 f(0) + a_2 f\left(\frac{1}{2}\right)$. Determinar los coeficientes a_0, a_1 y a_2 para que la fórmula tenga grado de exactitud al menos 2.

7. Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} y' &= yz - x, \quad x \in (0, 0.2) \\ z' &= z + x, \quad x \in (0, 0.2). \end{aligned}$$

   Sabiendo que $y(0) = 0, z(0) = 1$.

   (a) Con paso $h = 0.1$, determinar una aproximación mediante el método de Euler de $y(0.2)$ y $z(0.2)$.

   (b) Con paso $h = 0.1$, determinar una aproximación mediante el método de Runge-Kutta clásico de $y(0.1)$ y $z(0.1)$.