Exámen de Ampiación de Matemáticas
Segundo curso. Informática de Gestión
Fecha: **Grupo**:

---

1. Considremos la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$.

   (i) Demostrar que la ecuación admite una única solución en el intervalo $[1, 2]$.

   (ii) ¿ Se puede aplicar el método de iteración de punto fijo con $g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ y punto de inicio $x_0 = 1.5$ para hallar la solución de la ecuación anterior en $[1, 2]$?. En caso afirmativo, averiguar el número de iteraciones necesarias para que el error sea menor que 10^{-5}.

   (iii) ¿ Se puede aplicar el método de iteración de punto fijo con $g(x) = \sqrt{\frac{10}{4+x}}$ y punto de inicio $x_0 = 1.5$ para hallar la solución de la ecuación anterior en $[1, 2]$?. En caso afirmativo, averiguar el número de iteraciones necesarias para que el error sea menor que 10^{-5}.

2. (i) Enuncia una condición sobre la matriz de coeficientes de un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas que asegure que el método de Gauss-Seidel converge.

   (ii) Determinar una solución aproximada del sistema de ecuaciones

   $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 &= 4 \end{aligned}$$

   mediante el método de Gauss-Seidel partiendo de $\vec{X}^{0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se utilizará como criterio de parada que $\left\| \vec{X}^{n+1)} - \vec{X}^{n)} \right\|_\infty < 0.05$.

3. Sea $P_3(x)$ el polinomio interpolador para los datos $(0, 0)$, $(0.5, p)$, $(1, 3)$ y $(2, 2)$. Encontrar el valor de p si el coeficiente de x^3 en $P_3(x)$ es 6.

4. De un polinomio de grado 3 $P_3(x)$ se sabe que pasa por los puntos $(0, 4/9)$, $(1/3, 8/9)$, $(1/2, 5/9)$, $(1, 6/9)$.

   (a) Averiguar, sin hallar dicho polinomio, el área exacta del recinto que encierra la gráficas de $y = P_3(x)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

(b) Halla el polinomio y comprobar el resultado del apartado anterior.

5. Consideremos el problema de hallar una función $y(x)$ definida en el intervalo $[0,1]$ que verifica la ecuación $y''(x) - y(x) = -x$ y las condiciones de contorno $y(0) = y(1) = 0$. Dividir el intervalo $[0,1]$ en tres partes iguales y estimar el valor de la función $y(x)$ los dos puntos intermedios del intervalo.