Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas
Segundo curso, segundo cuatrimestre
Curso académico: 2010 – 2011
Departamento de Informática y Análisis Numérico
Escuela Politécnica Superior
Universidad de Córdoba

Hoja de ejercicios número 5: Lenguajes regulares

1. Utiliza el lema de bombeo para demostrar que los siguientes lenguajes no son regulares.
    a. $L = \{ a^i \; b^{2i} \mid i \geq 1\}$
    b. $L = \{ a^i \; b^j \; c^j \; d^i \mid i \geq 1 \wedge j \geq 1\}$

2. ¿Cuáles de los siguientes lenguajes son regulares? Si crees que un lenguaje no es regular, entonces utiliza el lema de bombeo para probarlo. Si crees que el lenguaje es regular entonces define una expresión regular que denote a dicho lenguaje. El alfabeto sobre el que están definidos todos los lenguajes es $\Sigma = \{0,1\}$.
    a. $L = \{0^i \; 1^j 0^{i+j} \mid i \geq 1 \wedge j \geq 1\}$
    b. El conjunto de todas las cadenas que tiene igual número de ceros que de unos.
    c. El conjunto de todas las cadenas que se escriben igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda = $\{ x \mid x \in \Sigma^* \wedge x = x^R\}$

3. Dados los siguientes lenguaje regulares
    - $L_1 = \{ 0^i 110^j \mid i, j \geq 0\}$
    - $L_2 = \{ 1 \, 0^i 1^j \; 0 \mid i, j \geq 0\}$

    a. Define expresiones regulares que denoten a L_1 y L_2.
    b. Construye gramáticas regulares que generen a L_1 y L_2.
    c. Construye autómatas finitos deterministas que reconozcan a L_1 y L_2.
    d. Utiliza los autómatas construidos para construir otros autómatas finitos **<u>deterministas</u>** que permitan reconocer los siguientes lenguajes:
        a. $L_3 = L_1 \cup L_2$
        b. $L_4 = L_1 L_2$
        c. $L_5 = L_1{}^*$
        d. $L_6 = \overline{L_1} = \Sigma^* - L_1$
        e. $L_7 = L_1 \cap L_2$
        f. $L_8 = L_1 - L_2$
        g. $L_9 = L_1{}^R$

4. La unión finita de lenguajes regulares genera un lenguaje regular, pero ¿la unión infinita de lenguajes regulares genera un lenguaje regular?, es decir, si L_1, L_2, L_3,… son regulares, entonces ¿es regular el siguiente lenguaje?:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$$

5. Indica si cada una de las siguientes afirmaciones es **verdadera o falsa**. Si crees que es verdadera entonces demuéstralo; en caso contrario, pon un contraejemplo. Todos los lenguajes están definidos sobre $\Sigma = \{a, b\}$
    a. Si $L_1 \subseteq L_2$ y L_1 no es regular entonces L_2 no es regular.
    b. Si $L_1 \subseteq L_2$ y L_2 no es regular entonces L_1 no es regular.
    c. Si L_1 no es regular entonces $\overline{L_1} = \Sigma^* - L_1$ no es regular.
    d. Si L_1 y L_2 no son regulares entonces $L_1 \cup L_2$ no es regular.
    e. Si L_1 y L_2 no son regulares entonces $L_1 \cap L_2$ no es regular.
    f. Si L_1 es regular y L_2 no es regular entonces $L_1 \cup L_2$ no es regular.

g. Si L_1 es regular, L_2 no es regular y $L_1 \cap L_2$ no es regular entonces $L_1 \cup L_2$ no es regular.

6. Sea $L = \{x \mid$ la longitud de x es un número par$\}$. L se define sobre un alfabeto $\Sigma = \{\sigma_1, ... ,\sigma_n\}$. ¿Es L un lenguaje regular? Si la respuesta es afirmativa entonces construye un autómata finito determinista que lo reconozca; si, por el contrario, la respuesta es negativa, demuéstralo.

7. Sea L un lenguaje regular y $L' = \{x \mid x \in L$ y la longitud de x es un número par$\}$. ¿Cuál de las siguientes respuestas es correcta?
   a. L' es regular para cualquier lenguaje L.
   b. L' nunca es regular.
   c. Depende de L.

8. Dado el alfabeto $\Sigma = \{0,\ldots,9\}$, el lenguaje formado por los números enteros no negativos múltiplos de 3 es regular. Construye un autómata finito determinista que lo reconozca.

9. Demuestra la siguiente extensión del lema de bombeo para lenguajes regulares:
   Si L un lenguaje regular, entonces
   $\exists n \ \forall z_1,z_2,z_3 \ (z_1 z_2 z_3 \in L \wedge |z_2| = n \Rightarrow \exists u, v, w$ tal que $z_2 = uvw, |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0 \ \ z_1 u v^i w z_3 \in L)$

10. Utiliza el ejercicio anterior para probar que el siguiente lenguaje no es regular:
    $L = \{0^i 1^j 2^j \mid i \geq 1 \wedge j \geq 1\}$

11. Considera los siguientes alfabetos $\Sigma = \{0,1\}$ y $\Gamma = \{a,b,c\}$. Se define la sustitución "s" de la siguiente forma: $s: \Sigma \rightarrow P(\Gamma^*)$
    $s(0) = L(a^*b)$, $s(1) = L(bc^*)$
    a. Aplicación de la sustitución a palabras: calcula s(10), s(101) y s(0101).
    b. Aplicación de la sustitución a lenguajes: calcula $s(L(1^*0))$ y $s(L(01^*(01)^*))$.

12. Se define el homomorfismo "h" sobre los alfabetos $\Sigma = \{0,1\}$ y $\Gamma = \{a, b ,c\}$:
    $h: \Sigma \rightarrow \Gamma^*$
    $h(0) = aab$, $h(1) = bcc$
    a. Aplicación del homomorfismo a palabras: calcula h(10), h(101) y h(0101).
    b. Aplicación del homomorfismo a lenguajes: calcula $h(L(1^*0))$ y $h(L(01^*(01)^*))$.
    c. Sea $L = \{a^n bb c^m \mid n \geq 1 \wedge m \geq 1\}$. L es un lenguaje regular, ya que puede ser denotado por la expresión regular aa^*bbcc^*. ¿Cuánto vale $h^{-1}(L)$?
    d. Dado el lenguaje regular $L = \{a^i b^j (cc)^k \mid i, j, k > 0\}$
       - Construye un autómata finito A que reconozca a L.
       - Construye un autómata finito A' que reconozca a $h^{-1}(L)$.
       - ¿Reconoce A' la palabra x = 01?
       - Obtén la expresión regular equivalente al autómata A' (problema de análisis).

13. Cociente de un lenguaje regular por otro lenguaje arbitrario. Dados los siguientes lenguajes
    $L_1 = L(0^*110^*)$, $L_2 = L(10^*1^*0)$, L_3,$=\{1^n 0^m 1^n \mid m \geq 0 \wedge n \geq 1\}$
    a. Indica si las siguientes cadenas pertenecen o no a L_1/L_2, L_1/L_3, L_2/L_3:
       x = 00, y = 01, z = 10011
    b. Obtén de forma intuitiva expresiones regulares que denoten los lenguajes regulares L_1/L_2, L_1/L_3, L_2/L_3

14. Aplica los siguientes algoritmos de decisión a los autómatas construidos en el ejercicio nº 3:
    a. Vacuidad de un lenguaje.
    b. Infinitud de un lenguaje.
    c. Igualdad de dos lenguajes.

15. Sea un autómata finito de n estados que acepta una cadena de longitud 2n. ¿Ha de aceptar necesariamente alguna cadena de longitud mayor que 3n?