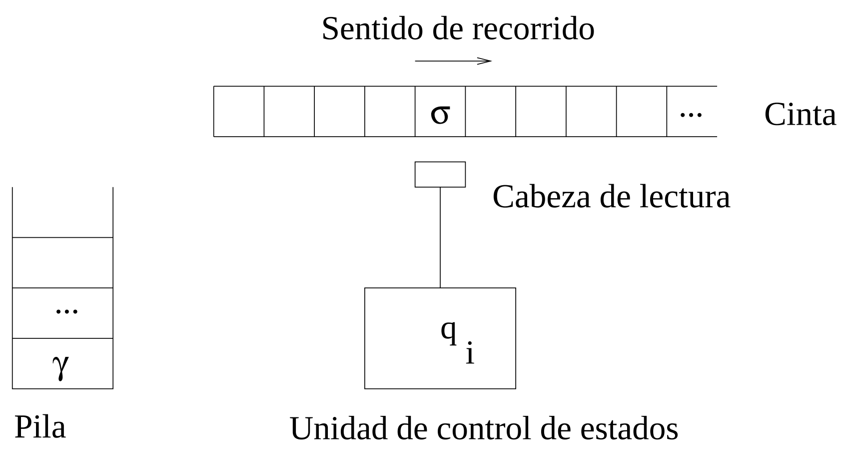
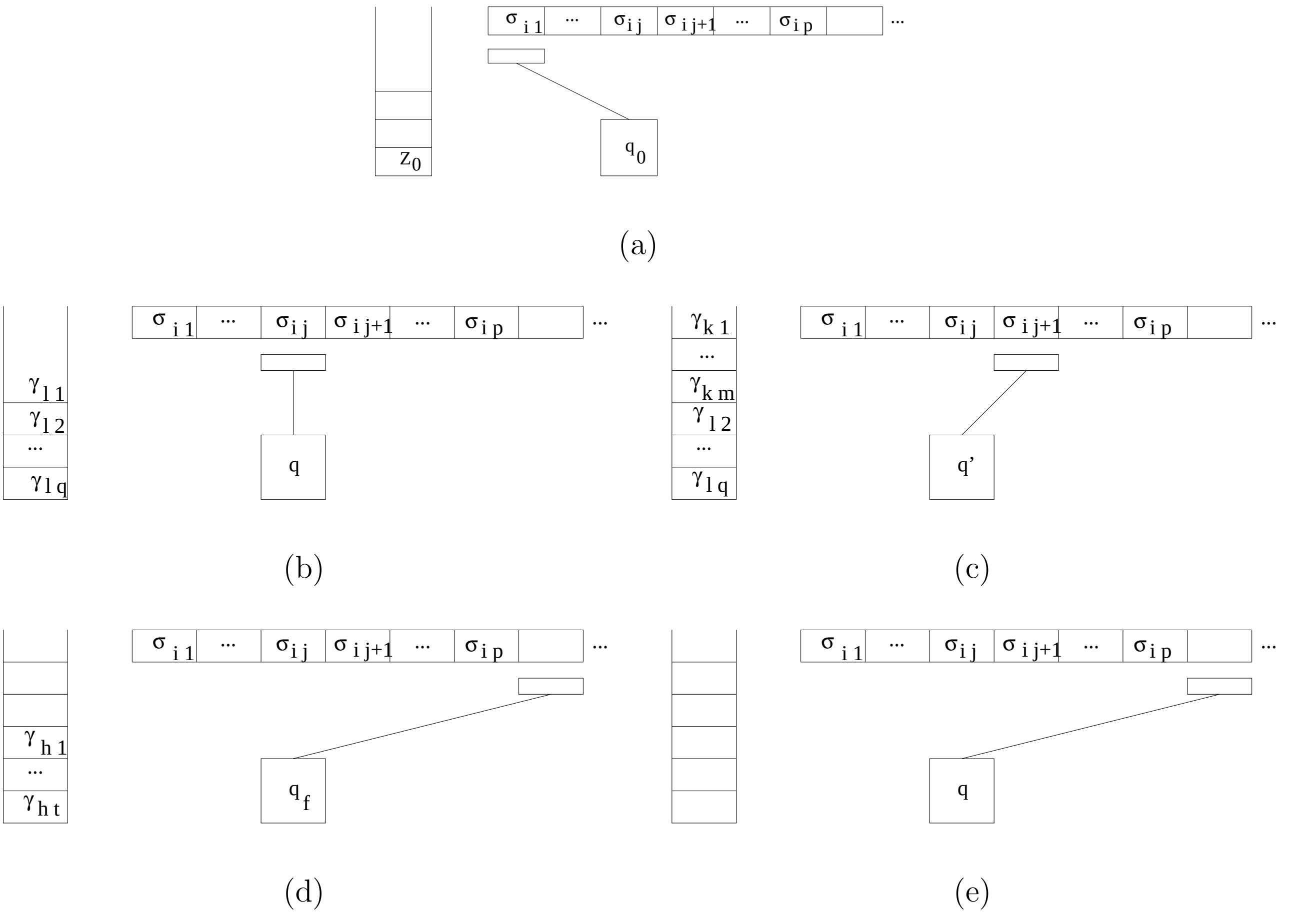


Componentes básicos de un autómata con pila.



Fases de un autómata con pila: (a) configuración inicial, (b) y (c) transición intermedia, (d) configuración final por estado final y (e) configuración final por pila vacía.

Existen dos criterios para definir el lenguaje reconocido por un autómata con pila:

- El ***lenguaje que reconoce*** un autómata con pila P ***según el criterio de estado final*** se denota por "$F(P)$" y se define como:

$$F(P) = \{x|x \in \Sigma^* \wedge (q_0, x, Z_0) \vdash^* (q_f, \epsilon, \alpha) \wedge q_f \in F\} \tag{1}$$

- El ***lenguaje que reconoce*** un autómata con pila P ***según el criterio de la pila vacía*** se denota por "$V(P)$" y se define como:

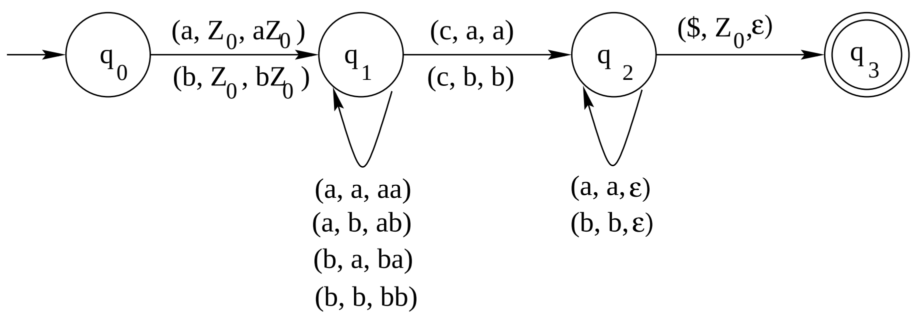
$$V(P) = \{x|x \in \Sigma^* \wedge (q_0, x, Z_0) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon)\} \tag{2}$$

Considérese el autómata con pila $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ donde:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $F = \{q_3\}$
- $\Sigma = \{a, b, c, \$\}$
- $\Gamma = \{a, b, Z_0\}$

y la función de transición es

$$
\begin{array}{rlcl}
(1) & \delta(q_0, a, Z_0) & = & \{(q_1, aZ_0)\} \\
(2) & \delta(q_0, b, Z_0) & = & \{(q_1, bZ_0)\} \\
(3) & \delta(q_1, a, a) & = & \{(q_1, aa)\} \\
(4) & \delta(q_1, a, b) & = & \{(q_1, ab)\} \\
(5) & \delta(q_1, b, a) & = & \{(q_1, ba)\} \\
(6) & \delta(q_1, b, b) & = & \{(q_1, bb)\} \\
(7) & \delta(q_1, c, a) & = & \{(q_2, a)\} \\
(8) & \delta(q_1, c, b) & = & \{(q_2, b)\} \\
(9) & \delta(q_2, a, a) & = & \{(q_2, \epsilon)\} \\
(10) & \delta(q_2, b, b) & = & \{(q_2, \epsilon)\} \\
(11) & \delta(q_2, \$, Z_0) & = & \{(q_3, \epsilon)\}
\end{array}
$$

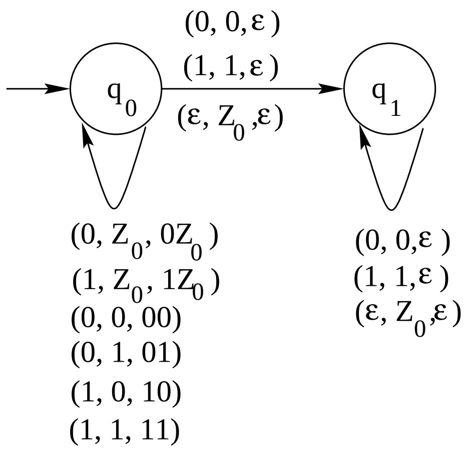


$$
\begin{array}{rll}
(q_0, abcba\$, Z_0) & \vdash_1 & (q_1, bcba\$, aZ_0) \\
& \vdash_5 & (q_1, cba\$, baZ_0) \\
& \vdash_8 & (q_2, ba\$, baZ_0) \\
& \vdash_{10} & (q_2, a\$, aZ_0) \\
& \vdash_9 & (q_2, \$, Z_0) \\
& \vdash_{11} & (q_3, \epsilon, \epsilon)
\end{array}
$$

Como $q_3 \in F$, la palabra $abcba\$ \in F(P)$.

Considérese un autómata con pila, que reconoce según el criterio de la pila vacía, $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ cuya función de transición δ es:

$$
\begin{array}{rlcl}
(1) & \delta(q_0, 0, Z_0) & = & \{(q_0, 0Z_0)\} \\
(2) & \delta(q_0, 1, Z_0) & = & \{(q_1, 1Z_0)\} \\
(3) & \delta(q_0, 0, 0) & = & \{(q_0, 00), (q_1, \epsilon)\} \\
(4) & \delta(q_0, 0, 1) & = & \{(q_0, 01)\} \\
(5) & \delta(q_0, 1, 0) & = & \{(q_0, 10)\} \\
(6) & \delta(q_0, 1, 1) & = & \{(q_0, 11), (q_1, \epsilon)\} \\
(7) & \delta(q_1, 0, 0) & = & \{(q_1, \epsilon)\} \\
(8) & \delta(q_1, 1, 1) & = & \{(q_1, \epsilon)\} \\
(9) & \delta(q_0, \epsilon, Z_0) & = & \{(q_1, \epsilon)\} \\
(10) & \delta(q_1, \epsilon, Z_0) & = & \{(q_1, \epsilon)\}
\end{array}
$$



$V(P) = \{ww^R | w \in L((0+1)^*)\}$.

Este lenguaje se denomina "palíndromo par".

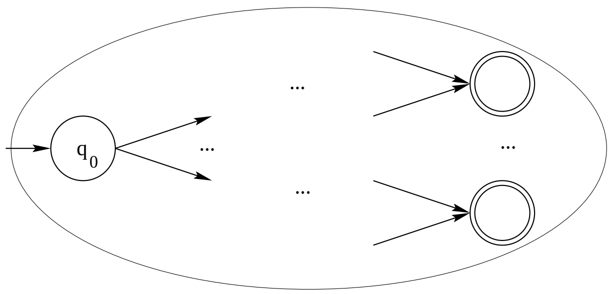
$$
\begin{array}{rll}
(q_0, 0110, Z_0) & \vdash_1 & (q_0, 110, 0Z_0) \quad (\text{o } \vdash_9 (q_0, 0110, \epsilon)) \\
& \vdash_5 & (q_0, 10, 10Z_0) \\
& \vdash_{6b} & (q_1, 0, 0Z_0) \quad (\text{o } \vdash_{6a} (q_1, 0, 110Z_0)) \\
& \vdash_7 & (q_1, \epsilon, Z_0) \\
& \vdash_{10} & (q_1, \epsilon, \epsilon)
\end{array}
$$

Transformación de una autómata con pila que utiliza el criterio del estado final en otro que utiliza el criterio de la pila vacía.

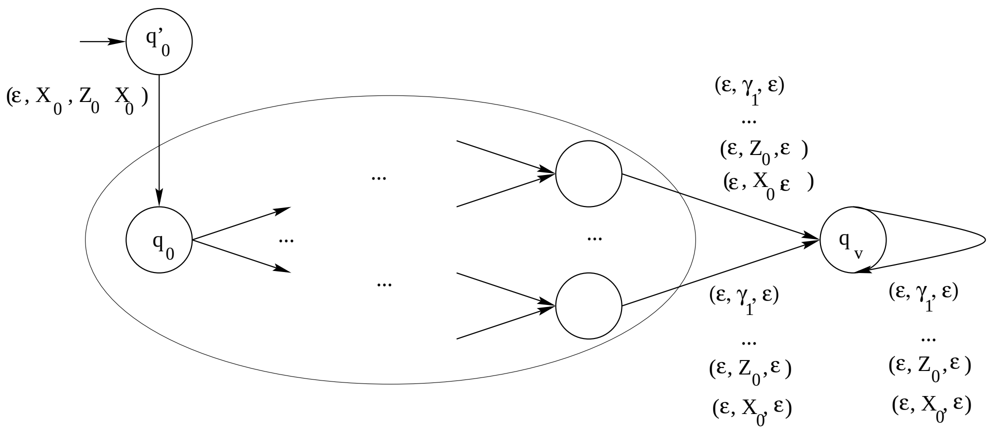
Dado $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ que reconoce por el criterio del estado final, se puede construir un autómata con pila P' equivalente que reconoce por el criterio de la pila vacía.

Se define $P' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0, X_0, \emptyset)$ donde

- $Q' = Q \cup \{q'_0, q_v\}$ $(q'_0, q_v \notin Q)$
- $\Gamma' = \Gamma \cup \{X_0\}$ $X_0 \notin \Gamma$
- q'_0 es el nuevo estado inicial.
- X_0 es el nuevo símbolo inicial de la pila.
- y δ' se define como:
  1. $\delta'(q'_0, \epsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$
  2. $\delta(q, \sigma, \gamma) \subseteq \delta'(q, \sigma, \gamma)$ $\forall q \in Q$ $\forall \sigma \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ $\forall \gamma \in \Gamma$.
  3. $(q_v, \epsilon) \in \delta(q_f, \epsilon, \gamma)$ $\forall q_f \in F$ $\forall \gamma \in \Gamma' = \Gamma \cup \{X_0\}$.
  4. $(q_v, \epsilon) \in \delta(q_v, \epsilon, \gamma)$ $\forall \gamma \in \Gamma' = \Gamma \cup \{X_0\}$.

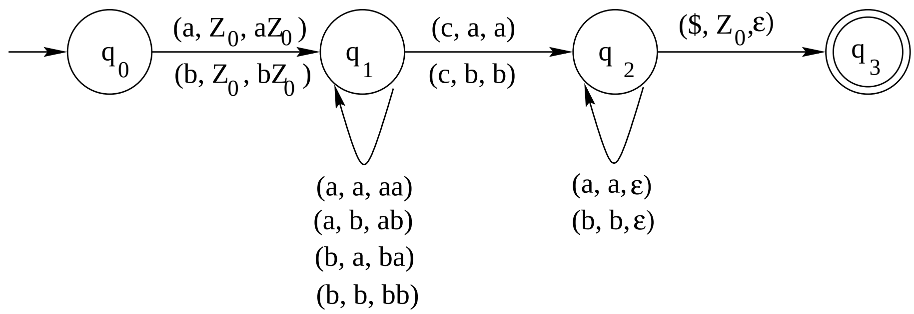


(a) Autómata original



(b) Autómata transformado

Sea P el autómata con pila de la siguiente figura:



Se define como $P' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', X_0, \emptyset)$ donde

- $Q' = Q \cup \{q_0', q_v\} = \{q_0', q_v, q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$,
- $\Gamma' = \Gamma \cup \{X_0\} = \{a, b, Z_0, X_0\}$
- q_0' es el nuevo estado inicial.
- X_0 es el nuevo símbolo inicial de la pila.
- y δ' se define como:

  Transición inicial

$$(1) \quad \delta'(q_0', \epsilon, X_0) \quad = \quad \{(q_0, Z_0X_0)\}$$

  Transiciones del autómata con pila P:

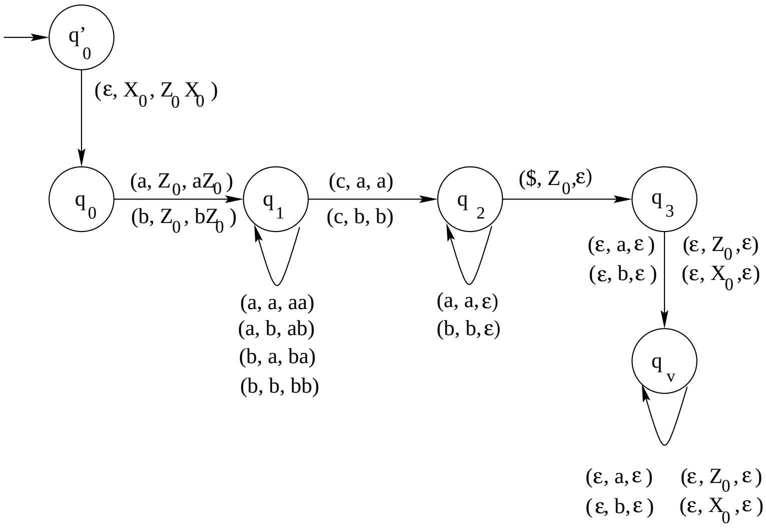
$$\begin{array}{rlcl}
(2) & \delta'(q_0, a, Z_0) & = & \{(q_1, aZ_0)\} \\
(3) & \delta'(q_0, b, Z_0) & = & \{(q_1, bZ_0)\} \\
(4) & \delta'(q_1, a, a) & = & \{(q_1, aa)\} \\
(5) & \delta'(q_1, a, b) & = & \{(q_1, ab)\} \\
(6) & \delta'(q_1, b, a) & = & \{(q_1, ba)\} \\
(7) & \delta'(q_1, b, b) & = & \{(q_1, bb)\} \\
(8) & \delta'(q_1, c, a) & = & \{(q_2, a)\} \\
(9) & \delta'(q_1, c, b) & = & \{(q_2, b)\} \\
(10) & \delta'(q_2, a, a) & = & \{(q_2, \epsilon)\} \\
(11) & \delta'(q_2, b, b) & = & \{(q_2, \epsilon)\} \\
(12) & \delta'(q_2, \$, Z_0) & = & \{(q_3, a)\}
\end{array}$$

  Transiciones que pasan al estado que va a vaciar la pila de P':

$$\begin{array}{rlcl}
(13) & \delta'(q_3, \epsilon, a) & = & \{(q_v, \epsilon)\} \\
(14) & \delta'(q_3, \epsilon, b) & = & \{(q_v, \epsilon)\} \\
(15) & \delta'(q_3, \epsilon, Z_0) & = & \{(q_v, \epsilon)\} \\
(16) & \delta'(q_3, \epsilon, X_0) & = & \{(q_v, \epsilon)\}
\end{array}$$

Transiciones del estado que vacía la pila de P':

$$\begin{array}{llcl}
(13) & \delta'(q_v, \epsilon, a) & = & \{(q_v, \epsilon)\} \\
(14) & \delta'(q_v, \epsilon, b) & = & \{(q_v, \epsilon)\} \\
(15) & \delta'(q_v, \epsilon, Z_0) & = & \{(q_v, \epsilon)\} \\
(16) & \delta'(q_v, \epsilon, X_0) & = & \{(q_v, \epsilon)\}
\end{array}$$



El análisis de la cadena $abcba\$$ utilizando el autómata P' es:

$$\begin{array}{rll}
(q_0', \epsilon abcba\$, X_0) & \vdash_1 & (q_0, abcba\$, Z_0X_0) \\
& \vdash_2 & (q_1, bcba\$, aZ_0X_0) \\
& \vdash_6 & (q_1, cba\$, baZ_0X_0) \\
& \vdash_9 & (q_2, ba\$, baZ_0X_0) \\
& \vdash_{11} & (q_2, a\$, aZ_0X_0) \\
& \vdash_{10} & (q_2, \$, Z_0X_0) \\
& \vdash_{12} & (q_3, \epsilon, X_0) \\
& \vdash_{16} & (q_v, \epsilon, \epsilon)
\end{array}$$

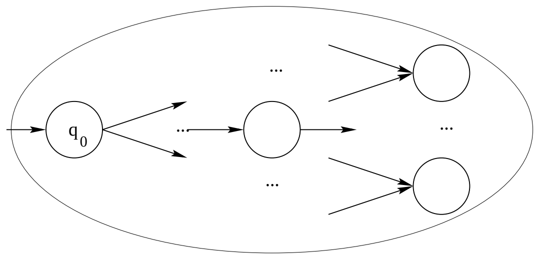
Como la pila está vacía, la palabra $abcba\$ \in V(P')$.

Transformación de una autómata con pila que utiliza el criterio de la pila vacía en otro que utiliza el criterio del estado final.

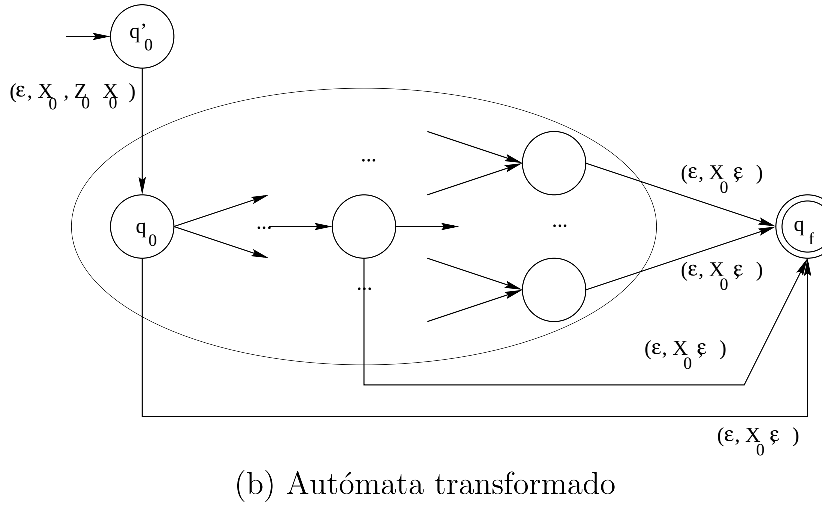
Dado $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ que reconoce por el criterio de la pila vacía, se puede construir un autómata con pila P' equivalente que reconoce por el criterio del estado final.

Se define $P' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', X_0, F)$ donde

- $Q' = Q \cup \{q_0', q_f\}$ $(q_0', q_f \notin Q)$,
- $\Gamma' = \Gamma \cup \{X_0\}$ $X_0 \notin \Gamma$,
- q_0' es el nuevo estado inicial,
- X_0 es el nuevo símbolo inicial de la pila,
- $F = \{q_f\}$
- y δ' se define como:
  1. $\delta'(q_0', \epsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$
  2. $\delta'(q, \sigma, \gamma) = \delta(q, \sigma, \gamma)$ $\forall q \in Q$ $\forall \sigma \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ $\forall \gamma \in \Gamma$.
  3. $(q_f, \epsilon) \in \delta'(q, \epsilon, X_0)$ $\forall q_{\in} Q$.

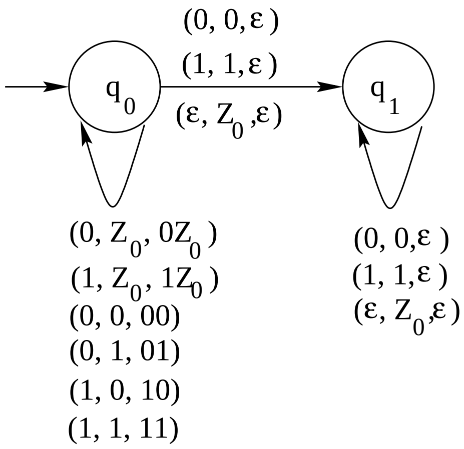


(a) Autómata original



(b) Autómata transformado

Sea P el autómata con pila de la siguiente figura:



Se define como $P' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', X_0, F)$ donde

- $Q' = Q \cup \{q_0', q_f\} = \{q_0', q_f, q_0, q_1\}$,
- $\Sigma = \{0, 1\}$,
- $\Gamma' = \Gamma \cup \{X_0\} = \{0, 1, Z_0, X_0\}$,
- q_0' es el nuevo estado inicial,
- X_0 es el nuevo símbolo inicial de la pila,
- $F = \{q_f\}$ es el conjunto de estado finales
- y δ' se define como:
  Transición inicial

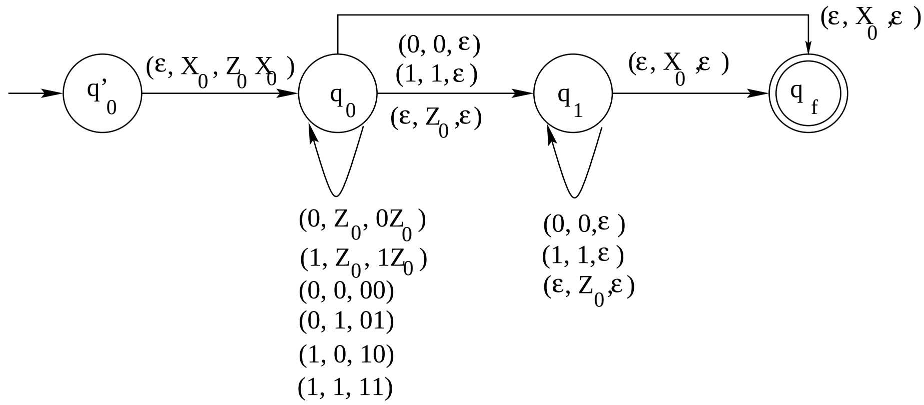
$$(1) \quad \delta'(q_0', \epsilon, X_0) \quad = \quad \{(q_0, Z_0X_0)\}$$

Transiciones del autómata con pila P:

$$\begin{array}{rlcl}
(2) & \delta(q_0, 0, Z_0) & = & \{(q_0, 0Z_0)\} \\
(3) & \delta(q_0, 1, Z_0) & = & \{(q_1, 1Z_0)\} \\
(4) & \delta(q_0, 0, 0) & = & \{(q_0, 00), (q_1, \epsilon)\} \\
(5) & \delta(q_0, 0, 1) & = & \{(q_0, 01)\} \\
(6) & \delta(q_0, 1, 0) & = & \{(q_0, 10)\} \\
(7) & \delta(q_0, 1, 1) & = & \{(q_0, 11), (q_1, \epsilon)\} \\
(8) & \delta(q_1, 0, 0) & = & \{(q_1, \epsilon)\} \\
(9) & \delta(q_1, 1, 1) & = & \{(q_1, \epsilon)\} \\
(10) & \delta(q_0, \epsilon, Z_0) & = & \{(q_1, \epsilon)\} \\
(11) & \delta(q_1, \epsilon, Z_0) & = & \{(q_1, \epsilon)\}
\end{array}$$

Transiciones que pasan al estado final de P':

$$\begin{array}{llll} (12) & \delta'(q_0, \epsilon, X_0) & = & \{(q_f, \epsilon)\} \\ (13) & \delta'(q_1, \epsilon, X_0) & = & \{(q_f, \epsilon)\} \end{array}$$



El análisis de la cadena 0110\$ utilizando el autómata P' es:

$$\begin{array}{lll} (q_0', 0110, Z_0) & \vdash_1 & (q_0, 0110, Z_0X_0) \\ & \vdash_2 & (q_0, 110, 0Z_0X_0) \quad (\text{o } \vdash_{10} (q_0, 0110, X_0)) \\ & \vdash_6 & (q_0, 10, 10Z_0X_0) \\ & \vdash_{7b} & (q_1, 0, 0Z_0X_0) \quad (\text{o } \vdash_{7a} (q_1, 0, 110Z_0X_0)) \\ & \vdash_8 & (q_1, \epsilon, Z_0X_0) \\ & \vdash_{11} & (q_1, \epsilon, X_0) \\ & \vdash_{13} & (q_3, \epsilon, \epsilon) \end{array}$$

Como $q_f \in F$, la palabra 0110\$ $\in F(P')$.

Dado un autómata a pila P que utilice el criterio de la pila vacía, se puede construir una gramática de contexto libre G equivalente, es decir, que verifique:

$$V(P) = L(G)$$

Si $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ entonces se define la gramática de contexto libre $G = (V_N, V_T, P, S)$ donde:

- $V_N = \{[q, \gamma, q'] | q, q' \in Q, \gamma \in \Gamma\} \cup \{S\}$, donde $S \notin \Gamma$,
- $V_T = \Sigma$,
- y el conjunto de reglas de producción se define mediante la aplicación de las siguientes transformaciones:

  1. Reglas de producción iniciales:

  $$\forall q \in Q \quad (S \longrightarrow [q_0, Z_0, q] \in P) \tag{3}$$

  2. Reglas de producción obtenidas a partir de transiciones que desapilan el símbolo situado en la cima de la pila:

  $$\begin{array}{l} \forall q, q' \in Q \;\; \forall \sigma \in \Sigma \cup \{\epsilon\} \;\; \forall \gamma \in \Gamma \\ \mathit{Si}\ (q', \epsilon) \in \delta(q, \sigma, \gamma) \\ \mathit{entonces}\ [q, \gamma, q'] \longrightarrow \sigma \in P \end{array} \tag{4}$$

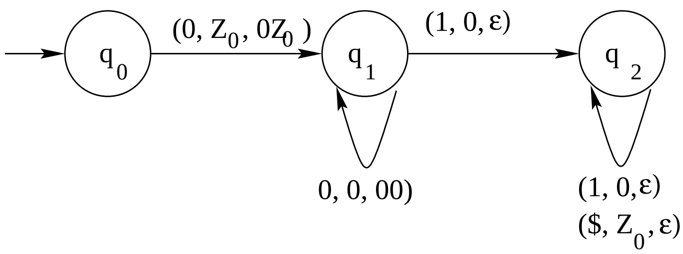
  3. Reglas de producción obtenidas a partir de transiciones que insertan símbolos en la pila:

  $$\begin{array}{l} \forall q, q', q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots, q_{i_k} \in Q \;\; \forall \sigma \in \Sigma \cup \{\epsilon\} \;\; \forall \gamma, \gamma_{j_1}, \gamma_{j_2}, \ldots, \gamma_{j_k} \in \Gamma \\ \mathit{Si}\ (q', \gamma_{j_1}\gamma_{j_2} \ldots \gamma_{j_k}) \in \delta(q, \sigma, \gamma) \\ \mathit{entonces}\ [q, \gamma, q_{i_k}] \longrightarrow \sigma[q', \gamma_{j_1}, q_{i_1}][q_{i_1}, \gamma_{j_2}, q_{i_2}] \ldots [q_{i_{k-1}}, \gamma_{j_k}, q_{i_k}] \in P \end{array} \tag{5}$$

  Se ha de tener en cuenta que se generará una regla de producción diferente para cada la elección de los estados $q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots, q_{i_k}$. Dicha elección puede considerar que todos los estados son iguales, diferentes o cualquier otra combinación posible.

Sea el autómata con pila $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ donde $\Sigma = \{0, 1, \$\}$, $\Gamma = \{Z_0, 0\}$ y la función de transición es:

$$\begin{array}{llcll}
(1) & \delta(q_0, 0, Z_0) & = & \{(q_1, 0Z_0)\} & \textit{Empezar} \\
(2) & \delta(q_1, 0, 0) & = & \{(q_1, 00)\} & \textit{Apilar} \\
(3) & \delta(q_1, 1, 0) & = & \{(q_2, \epsilon)\} & \textit{Cambiar} \\
(4) & \delta(q_2, 1, 0) & = & \{(q_2, \epsilon)\} & \textit{Desapilar} \\
(5) & \delta(q_2, \$, Z_0) & = & \{(q_2, \epsilon)\} & \textit{Terminar}
\end{array}$$



Este autómata reconoce el lenguaje

$$V(P) = \{0^n 1^n \$ | n \geq 1\}$$

.

Por ejemplo, el análisis de la cadena 0011\$ es el siguiente:

$$\begin{array}{lll}
(q_0, 0011\$, Z_0) & \vdash_1 & (q_1, 011\$, 0Z_0) \\
& \vdash_2 & (q_1, 11\$, 00Z_0) \\
& \vdash_3 & (q_2, 1\$, 0Z_0) \\
& \vdash_4 & (q_2, \$, Z_0) \\
& \vdash_5 & (q_2, \epsilon, \epsilon)
\end{array}$$

La gramática de contexto libre equivalente a P es $G = (V_N, V_T, P, S)$ donde

$$\begin{array}{lll}
V_N & = & \{ \\
& & [q_0, Z_0, q_0], [q_0, Z_0, q_1], [q_0, Z_0, q_2] \\
& & [q_0, 0, q_0], [q_0, 0, q_1], [q_0, 0, q_2] \\
& & [q_1, Z_0, q_0], [q_1, Z_0, q_1], [q_1, Z_0, q_2] \\
& & [q_1, 0, q_0], [q_1, 0, q_1], [q_1, 0, q_2] \\
& & [q_2, Z_0, q_0], [q_2, Z_0, q_1], [q_2, Z_0, q_2] \\
& & [q_2, 0, q_0], [q_2, 0, q_1], [q_2, 0, q_2] \\
& & \}
\end{array}$$

$V_T = \Sigma = \{0, 1, \$\}$ y el conjunto de reglas de producción es:

- Reglas iniciales

$$
\begin{aligned}
S &\longrightarrow [q_0, Z_0, q_0] \\
S &\longrightarrow [q_0, Z_0, q_1] \\
S &\longrightarrow [q_0, Z_0, q_2]
\end{aligned}
$$

- Reglas obtenidas a partir de transiciones que desapilan un símbolo
  - Regla generada por la transición número 3:

$$[q_1, 0, q_2] \longrightarrow 1$$

  - Regla generada por la transición número 4:

$$[q_2, 0, q_2] \longrightarrow 1$$

  - Regla generada por la transición número 5:

$$[q_2, Z_0, q_2] \longrightarrow \$$$

- Reglas obtenidas a partir de transiciones que apilan símbolos
  - Reglas generadas por la transición número 1:

$$
\begin{aligned}
[q_0, Z_0, q_0] &\longrightarrow 0[q_1, 0, q_0][q_0, Z_0, q_0] \\
[q_0, Z_0, q_0] &\longrightarrow 0[q_1, 0, q_1][q_1, Z_0, q_0] \\
[q_0, Z_0, q_0] &\longrightarrow 0[q_1, 0, q_2][q_2, Z_0, q_0] \\
[q_0, Z_0, q_1] &\longrightarrow 0[q_1, 0, q_0][q_0, Z_0, q_1] \\
[q_0, Z_0, q_1] &\longrightarrow 0[q_1, 0, q_1][q_1, Z_0, q_1] \\
[q_0, Z_0, q_1] &\longrightarrow 0[q_1, 0, q_2][q_2, Z_0, q_1] \\
[q_0, Z_0, q_2] &\longrightarrow 0[q_1, 0, q_0][q_0, Z_0, q_2] \\
[q_0, Z_0, q_2] &\longrightarrow 0[q_1, 0, q_1][q_1, Z_0, q_2] \\
[q_0, Z_0, q_2] &\longrightarrow 0[q_1, 0, q_2][q_2, Z_0, q_2]
\end{aligned}
$$

  - Reglas generadas por la transición número 2:

$$
\begin{aligned}
[q_0, Z_0, q_0] &\longrightarrow 0[q_1, 0, q_0][q_0, 0, q_0] \\
[q_0, Z_0, q_0] &\longrightarrow 0[q_1, 0, q_1][q_1, 0, q_0] \\
[q_0, Z_0, q_0] &\longrightarrow 0[q_1, 0, q_2][q_2, 0, q_0] \\
[q_0, Z_0, q_1] &\longrightarrow 0[q_1, 0, q_0][q_0, 0, q_1] \\
[q_0, Z_0, q_1] &\longrightarrow 0[q_1, 0, q_1][q_1, 0, q_1] \\
[q_0, Z_0, q_1] &\longrightarrow 0[q_1, 0, q_2][q_2, 0, q_1] \\
[q_0, Z_0, q_2] &\longrightarrow 0[q_1, 0, q_0][q_0, 0, q_2] \\
[q_0, Z_0, q_2] &\longrightarrow 0[q_1, 0, q_1][q_1, 0, q_2] \\
[q_0, Z_0, q_2] &\longrightarrow 0[q_1, 0, q_2][q_2, 0, q_2]
\end{aligned}
$$