



UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE CÓRDOBA

DEPARTAMENTO DE
INFORMÁTICA Y ANÁLISIS NUMÉRICO

PROGRAMACIÓN DECLARATIVA

INGENIERÍA INFORMÁTICA

CUARTO CURSO

PRIMER CUATRIMESTRE

Tema 4.- Recursión e iteración

Primera
parte:
Scheme

Tema 1.- Introducción al Lenguaje Scheme

Tema 2.- Expresiones y Funciones

Tema 3.- Predicados y sentencias condicionales

Tema 4.- **Iteración y Recursión**

Tema 5.- Tipos de Datos Compuestos

Tema 6.- Abstracción de Datos

Tema 7.- Lectura y Escritura

Segunda
parte: Prolog

Tema 8.- Introducción al Lenguaje Prolog

Tema 9.- Elementos Básicos de Prolog

Tema 10.- Listas

Tema 11.- Reevaluación y el "corte"

Tema 12.- Entrada y Salida

Primera parte: Scheme

Tema 1.- Introducción al Lenguaje Scheme

Tema 2.- Expresiones y Funciones

Tema 3.- Predicados y sentencias condicionales

Tema 4.- Iteración y Recursión

Tema 5.- Tipos de Datos Compuestos

Tema 6.- Abstracción de Datos

Tema 7.- Lectura y Escritura

Índice

1. Forma especial iterativa "do"
2. Recursión
3. Funciones pasadas como parámetros
4. Funciones devueltas como resultados

Índice

1. Forma especial iterativa "do"
2. Recursión
3. Funciones pasadas como parámetros
4. Funciones devueltas como resultados

1. Forma especial iterativa "do"

- **Sintaxis**

(do

;; Variables del bucle

(

(<variable₁> <inicialización₁> <paso₁>)

(<variable₂> <inicialización₂> <paso₂>)

...

(<variable_n> <inicialización_n> <paso_n>)

)

;; Condición de salida y sentencias asociadas

(<condición> <sentencia> ...)

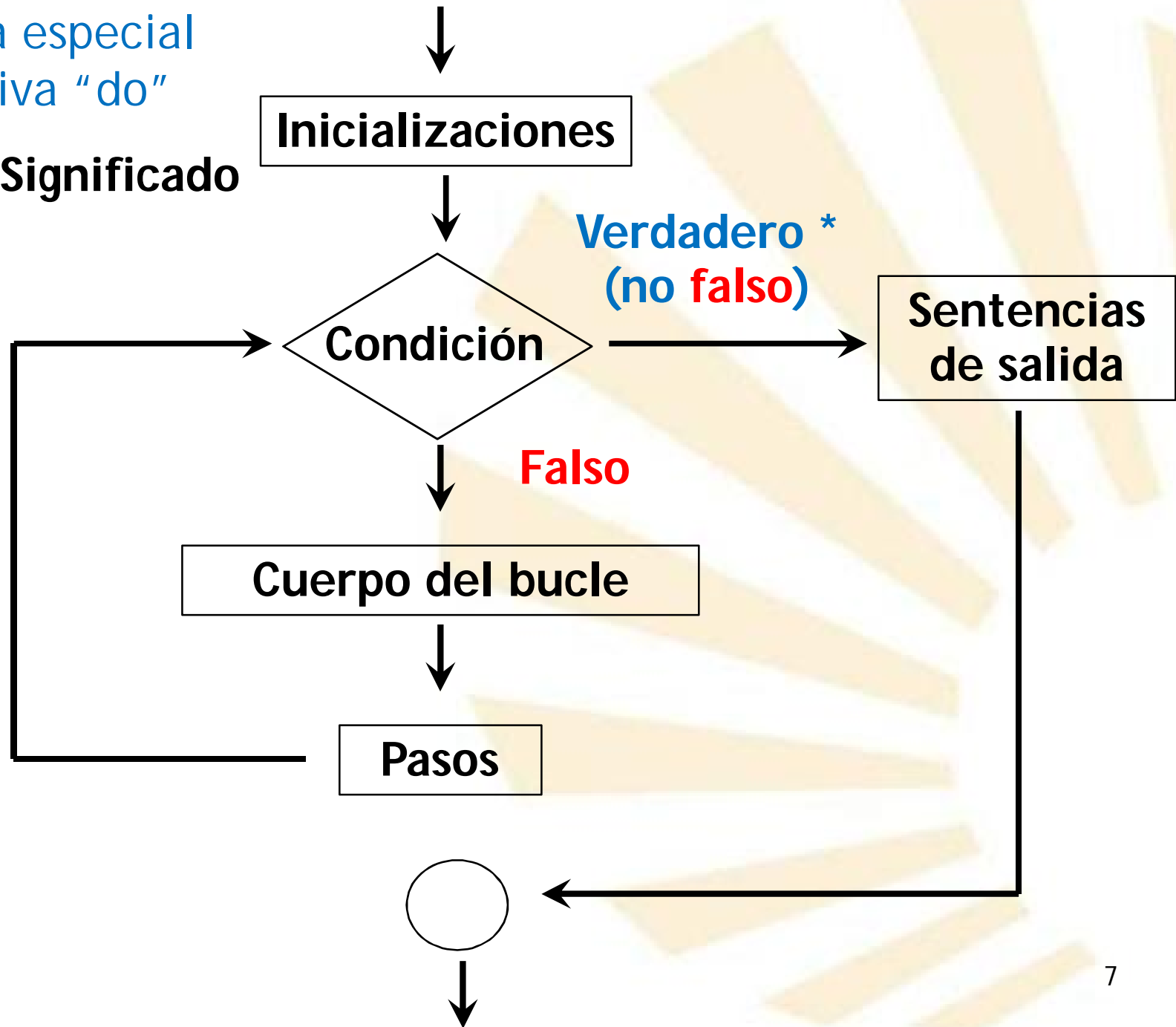
;; Cuerpo del bucle

<sentencia> ...

)

1. Forma especial iterativa "do"

- Significado



1. Forma especial iterativa “do”

- **Semántica**

- El ámbito de cada *variable_i* abarca
 - el cuerpo del bucle **do**
 - la **condición** de salida y sentencias asociadas
 - y las sentencias de **paso**.
- La **evaluación** de las sentencias de **inicialización** se realiza en un **orden no determinado**
- La *variable_i* **no** puede usarse en las sentencias de inicialización.
- Las sentencias de paso pueden usar los **valores** de las **variables** que tengan en el **paso anterior**.
- La **evaluación** de las sentencias de **paso** se realiza en un **orden no determinado**.

1. Forma especial iterativa “do”

- **Ejemplo (1/9):** factorial

$$f(n) = n! = \begin{cases} 1 & \text{si } (n = 0) \vee (n = 1) \\ n \times (n - 1)! & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

1. Forma especial iterativa "do"

- **Ejemplo (2/9):** factorial (versión n° 1)

```
(define (factorial-con-set n)
  (if (= n 0) 1
    (do
      ;; Variables del bucle
      (
        (i n (- i 1))
        (resultado 1) ;; no tiene "paso"
      )
      ;; Condición y sentencia de salida
      ((= i 1) resultado)
      ;; Cuerpo del bucle
      (set! resultado (* resultado i))
    )
  )
)
```

Se recomienda evitar el uso de **set!**

1. Forma especial iterativa "do"

- **Ejemplo (3/9):** factorial (versión nº 2)

```
(define (factorial n)
  (if (= n 0) 1
    (do
      ;; Variables del bucle
      (
        (i n (- i 1))
        (resultado 1 (* resultado i))
      )
      ;; Condición y sentencia de salida
      ((= i 1) resultado)
      ;; no hay cuerpo del bucle
    )
  )
)
```

1. Forma especial iterativa “do”

- **Ejemplo (4/9):** Fibonacci

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{Si } n=0 \vee n=1 \\ f(n-1)+f(n-2) & \text{Si } n \geq 2 \end{cases}$$

1. Forma especial iterativa "do"

- **Ejemplo (5/9):** Fibonacci

```
(define (fib-iter n)
  (if (or (= n 0) (= n 1)) 1
      (do
        ;; Variables del bucle
        (
          (actual 1 (+ actual anterior))
          (anterior 1 actual)
          (i n (- i 1))
        )
        ;; Condición y sentencia de salida
        ((= i 1) actual)
        ;; no hay cuerpo del bucle
      )
  )
)
```

1. Forma especial iterativa "do"

- **Ejemplo: series no paramétricas**

$$\sum_{n=a}^b n^3 = a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 + \dots + (b-1)^3 + b^3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \times (n+2)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{9 \times 11} + \dots = \frac{\pi}{8}$$

1. Forma especial iterativa "do"

- **Ejemplo (4/9)**
$$\sum_{n=a}^b n^3 = a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 + \dots + (b-1)^3 + b^3$$

```
(define (sumar-cubos inicial final)
  (define (cubo x)
    (* x x x)
  )
  (do
    ;; variables del bucle
    (
      (i inicial (+ i 1))
      (resultado 0.0 (+ resultado (cubo i)))
    )
    ;; Condición y sentencia de salida
    ((> i final) resultado)
    ;; No hay cuerpo
  )
)
```

(suma-cubos 1 3) → 36

1. Forma especial iterativa "do"

- **Ejemplo (5/9)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

(**define** (sumar-reciprococ-cuadrados-perfectos *final*)

(**define** (termino n)

(/ 1.0 (* n n))

)

(**do** ;; *Variables del bucle*

(

(i 1.0 (+ i 1))

(resultado 0.0 (+ resultado (termino i)))

)

;; *Condición de salida: número de elementos*

((> i final) resultado)

;; *No hay cuerpo*

)

)

(sumar-reciprococ-cuadrados-perfectos 1000) → 1,6449...

1. Forma especial iterativa "do"

- **Ejemplo(6/9)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \times (n+2)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{9 \times 11} + \dots = \frac{\pi}{8}$$

```
(define (sumar-pi-octavos-v1 cota)
```

```
  (define (termino n)
```

```
    (/ 1.0 (* n (+ n 2))))
```

```
  )
```

```
  (do ;; variables del bucle
```

```
    (
```

```
      (i 1.0 (+ i 4))
```

```
      (resultado 0.0 (+ resultado (termino i)))
```

```
    )
```

```
    ;;
```

```
    ((< (termino i) cota) resultado)
```

```
    ;; No hay cuerpo
```

```
  )
```

```
)
```

```
(* 8.0 (sumar-pi-octavos-v1 0.00001)) → 3.135263603..17
```

1. Forma especial iterativa "do"

- **Ejemplo(6/9)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \times (n+2)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{9 \times 11} + \dots = \frac{\pi}{8}$$

```
(define (sumar-pi-octavos-v1 cota)
```

```
  (define (termino n)
```

```
    (/ 1.0 (* n (+ n 2))))
```

```
  )
```

```
  (do ;; variables del bucle
```

```
    (
```

```
      (i 1.0 (+ i 4))
```

```
      (resultado 0.0 (+ resultado (termino i)))
```

```
    )
```

```
    ;;
```

```
    ((< (termino i) cota) resultado)
```

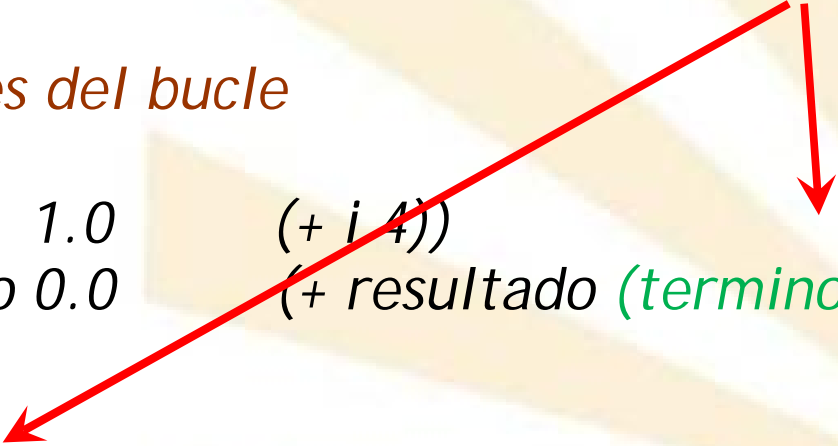
```
    ;; No hay cuerpo
```

```
  )
```

```
)
```

```
(* 8.0 (sumar-pi-octavos-v1 0.00001)) → 3.135263603...18
```

Ineficiencia



1. Forma especial iterativa "do"

- **Ejemplo(7/9)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \times (n+2)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{9 \times 11} + \dots = \frac{\pi}{8}$$

```
(define (sumar-pi-octavos-v2 cota)
```

```
  (define (termino n)
```

```
    (/ 1.0 (* n (+ n 2))))
```

```
  )
```

```
  (do ;; variables del bucle
```

```
    (
```

```
      (i 5.0 (+ i 4))
```

```
      (valor (termino 1) (termino i))
```

```
      (resultado 0.0 (+ resultado valor))
```

```
    )
```

```
    ;; Condición y sentencia de salida
```

```
    ((< valor cota) resultado)
```

```
    ;; No hay cuerpo
```

```
  )
```

```
)
```

```
(* 8.0 (sumar-pi-octavos-v2 0.00001)) → 3.135263603.19
```

1. Forma especial iterativa "do"

- **Ejemplo(8/9)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \times (n+2)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{9 \times 11} + \dots = \frac{\pi}{8}$$

n=n+4

La serie anterior es **equivalente** a la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3) \times (4n-1)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{9 \times 11} + \dots = \frac{\pi}{8}$$

1. Forma especial iterativa "do"

- Ejemplo(8/9)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3) \times (4n-1)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{9 \times 11} + \dots = \frac{\pi}{8}$$

```

(define (sumar-pi-octavos-v3 cota)
  (define (termino n)
    (/ 1.0
       (* (- (* 4 n) 3) (- (* 4 n) 1) )
    )
  )
  (do (
      (i 2.0 (+ i 1))
      (valor (termino 1) (termino i))
      (resultado 0.0 (+ resultado valor))
    )
    ;; Condición y sentencia de salida
    ((< valor cota) resultado)
    ;; No hay cuerpo
  )
)

```

1. Forma especial iterativa “do”

- **Ejemplo: series paramétricas**

$$\textit{seno}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

1. Forma especial iterativa "do"

- **Ejemplo (9/9): series paramétricas**

```
(define (serie-seno x iteraciones)
  (define (termino x n)
    (* (expt -1 n)
       (/ (expt x (+ (* 2 n) 1))
          (factorial (+ (* 2 n) 1)))))
  )
  )
  ;;
  (do (
      (n 0 (+ n 1))
      (resultado 0.0 (+ resultado (termino x n))))
    )
    ;;
    ((> n iteraciones) resultado)
    ;; No hay cuerpo
  )
)
```

$$\text{seno}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Índice

1. Forma especial iterativa "do"
2. Recursión
3. Funciones pasadas como parámetros
4. Funciones devueltas como resultados

2. Recursión

- Descripción
- Recursión simple
- Recursión múltiple
- Recursión de cola
- Forma especial “let con nombre”

2. Recursión

- Descripción
- Recursión simple
- Recursión múltiple
- Recursión de cola
- Forma especial “let con nombre”

2. Recursión

- Descripción

- Una función es “**recursiva**” si **se llama** a sí misma
- **Fases** para definir una función recursiva
 1. Determinar **cómo** realizar **un paso**.
 2. **Descomponer** el problema en
 - un paso
 - y en un sub-problema **idéntico** más simple.
 3. Determinar **cuándo** se ha de **parar** la ejecución de la función.

2. Recursión

- Descripción
- Recursión simple
- Recursión múltiple
- Recursión de cola
- Forma especial “let con nombre”

2. Recursión

- Recursión simple

- Una función posee **recursividad simple**

- si solamente puede **llamarse** a sí misma **una única vez, a lo sumo**

- por cada **línea de ejecución.**

- **Línea de ejecución**

- Sucesión de sentencias que se pueden ejecutar consecutivamente dentro de una función

2. Recursión

- Recursión simple

- **Ejemplo (1/7)**

- Factorial (versión recursiva): $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = n! = \begin{cases} 1 & \text{si } (n = 0) \vee (n = 1) \\ n \times (n - 1)! & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

2. Recursión

- Recursión simple

- **Ejemplo (1/7)**

- Factorial (versión recursiva): $n \in \mathbb{N}$

```
(define (factorial n)
  (if (or (= n 0) (= n 1))
      1
      (* n (factorial (- n 1))))
)
```

(factorial 4) → 24

2. Recursión

- Recursión simple

- **Ejemplo (2/7)**

- Potencia: $a \in R, b \in N$

$$a^b = \begin{cases} 1 & \text{Si } b = 0 \\ a \times a^{b-1} & \text{Si } b \geq 1 \end{cases}$$

2. Recursión

- Recursión simple

- **Ejemplo (2/7)**

- Potencia: $a \in R, b \in N$

```
(define (potencia a b)
  (if (= b 0)
    1
    (* a (potencia a (- b 1)))
  )
)
```

(potencia 2 3) → 8

2. Recursión

- Recursión simple

- **Ejemplo (3/7)**

$$\sum_{n=a}^b n^3 = a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 + \dots + (b-1)^3 + b^3$$

```
(define (suma-cubos inicial final)
  ;; función auxiliar
  (define (cubo x) (* x x x))
  ;; cuerpo de suma-cubos
  (if (> inicial final)
    0
    (+
     (cubo inicial)
     (suma-cubos (+ inicial 1) final)
    )
  )
)
```

(suma-cubos 1 3) ➔ 36

2. Recursión

- Recursión simple
 - **Ejemplo: series no paramétricas**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \times (n+2)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{9 \times 11} + \dots = \frac{\pi}{8}$$

$n=n+4$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3) \times (4n-1)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{9 \times 11} + \dots = \frac{\pi}{8}$$

2. Recursión

- Recursión simple

- **Ejemplo (4/7)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

(define (suma-reciprococ-cuadrados-perfectos n)

(define (termino n)

 (/ 1.0 (* n n))

)

(if (<= n 0) 0.0

 (+ (termino n)

 (suma-reciprococ-cuadrados-perfectos (- n 1))

)

)

)

2. Recursión

- Recursión simple

- **Ejemplo (5/7)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \times (n+2)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{9 \times 11} + \dots = \frac{\pi}{8}$$

```
(define (suma-pi-octavos-v1 n)
```

```
  (define (termino n)
    (/ 1.0 (* n (+ n 2))))
  )
```

```
(define (auxiliar-suma-pi-octavos i n)
```

```
(if (> i n)
    0.0
    (+ (termino i)
       (auxiliar-suma-pi-octavos (+ i 4) n)
      )
  )
)
```

```
;; Llamada a la función auxiliar
```

```
(auxiliar-suma-pi-octavos 1 n)
```

```
)
```

2. Recursión

- Recursión simple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3) \times (4n-1)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{9 \times 11} + \dots = \frac{\pi}{8}$$

○ Ejemplo (6/7)

```
(define (suma-pi-octavos-v2 n)
```

```
  (define (termino n)
```

```
    (/ 1.0
```

```
       (* (- (* 4 n) 3) (- (* 4 n) 1) )
```

```
    )
```

```
  )
```

```
(define (auxiliar-suma-pi-octavos i n)
```

```
  (if (> i n) 0.0
```

```
      (+ (termino i)
```

```
          (auxiliar-suma-pi-octavos (+ i 1) n)
```

```
      )
```

```
  )
```

```
)
```

;; Llamada a la función auxiliar

```
(auxiliar-suma-pi-octavos 1 n)
```

```
)
```

2. Recursión

- Recursión simple

- **Ejemplo (7/7): serie paramétrica**

$$\text{seno}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

```
(define (serie-seno x n)
  (define (termino x n)
    (* (expt -1 n)
      (/ (expt x (+ (* 2 n) 1))
        (factorial (+ (* 2 n) 1))
      )
    )
  )
)
;;
(if (< n 0)
  0.0
  (+ (termino x n) (serie-seno x (- n 1))))
)
```

2. Recursión

- Descripción
- Recursión simple
- Recursión múltiple
- Recursión de cola
- Forma especial “let con nombre”

2. Recursión

- Recursión múltiple

- Una función posee **recursividad múltiple** si
 - puede **llamarse** a sí misma **más de una vez**
 - en una misma **línea de ejecución**, al menos.

2. Recursión

- Recursión múltiple
 - **Ejemplo (1/2)**
 - **Fibonacci** (versión recursiva doble)

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{Si } n = 0 \vee n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{Si } n \geq 2 \end{cases}$$

2. Recursión

- Recursión múltiple

- **Ejemplo (1/2)**

- **Fibonacci** (versión recursiva doble)

```
(define (fibonacci n)
  (if (or (= n 0) (= n 1))
    1
    (+
     (fibonacci (- n 1))
     (fibonacci (- n 2))
    )
  )
)
```

(fibonacci 4) → 5

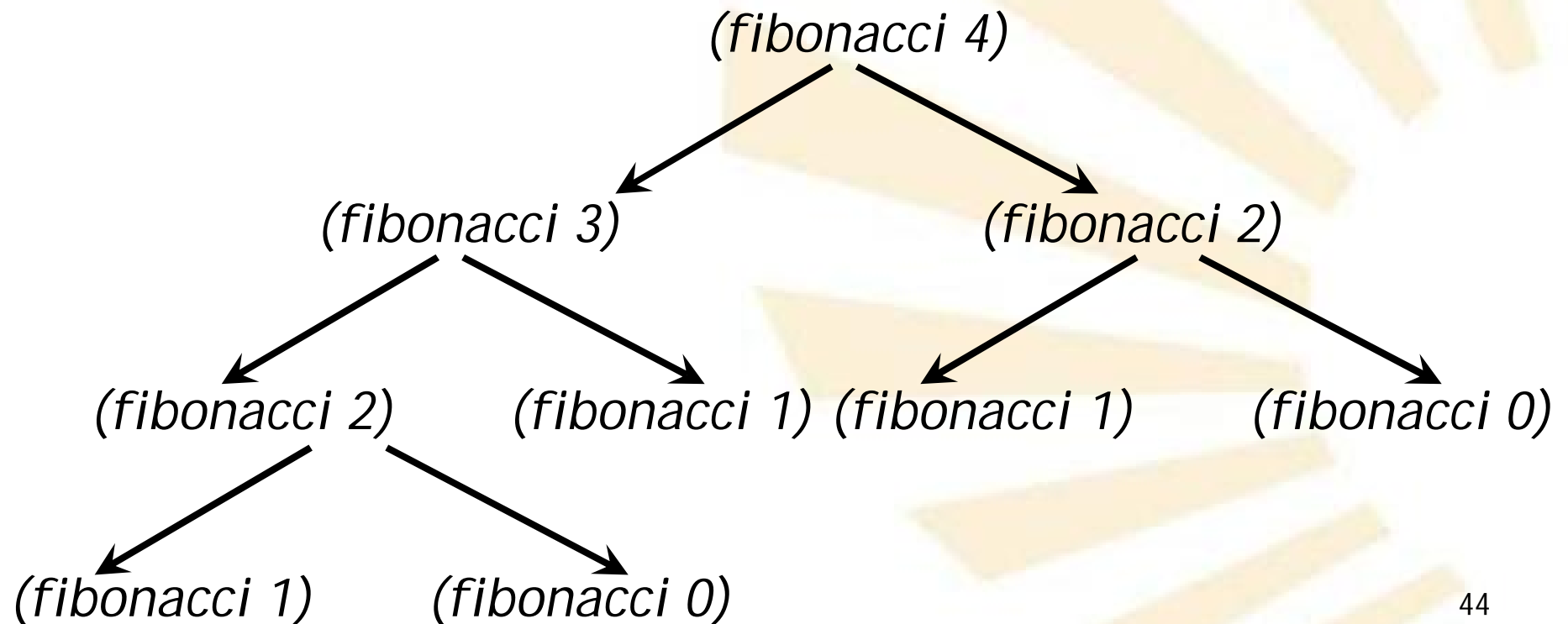
2. Recursión

- Recursión múltiple

- **Ejemplo (1/2)**

- **Fibonacci** (versión recursiva doble)

- **Árbol de activación**



2. Recursión

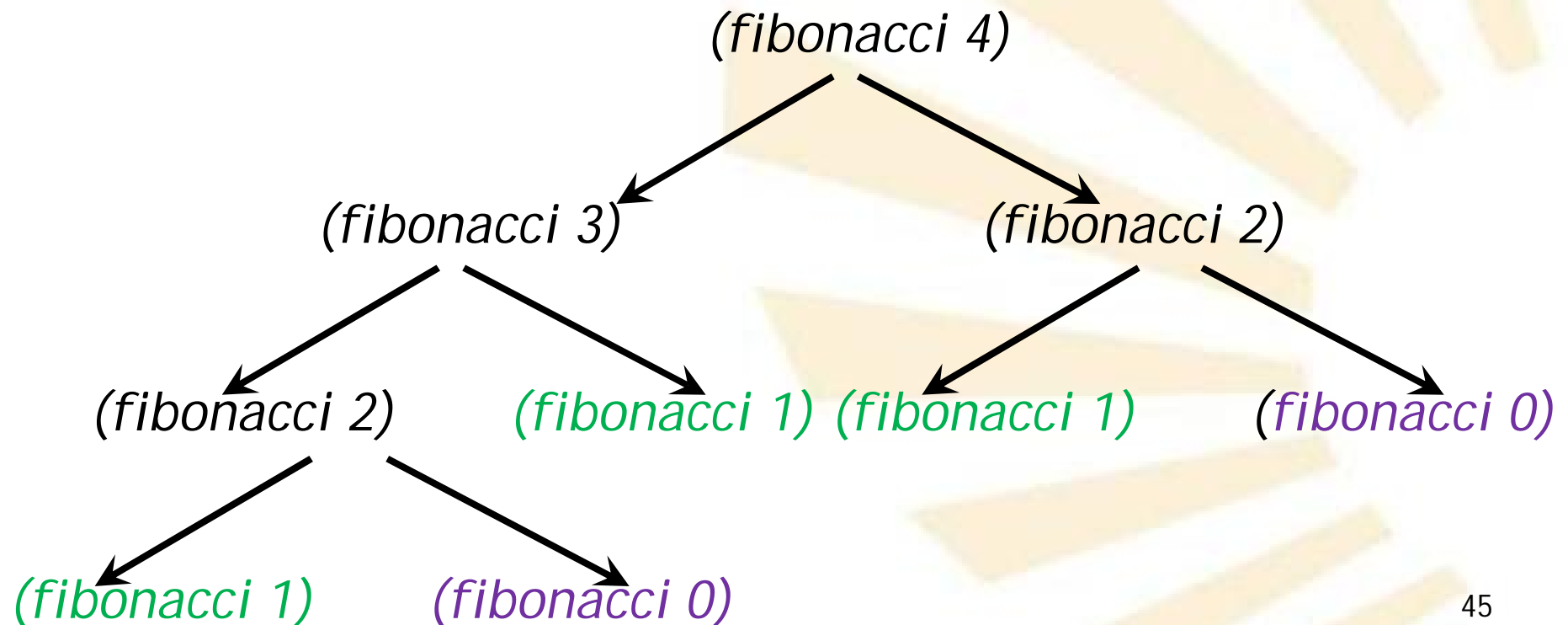
- Recursión múltiple

Ineficiencia de la recursión múltiple: **repetición** de cálculos

- **Ejemplo (1/2)**

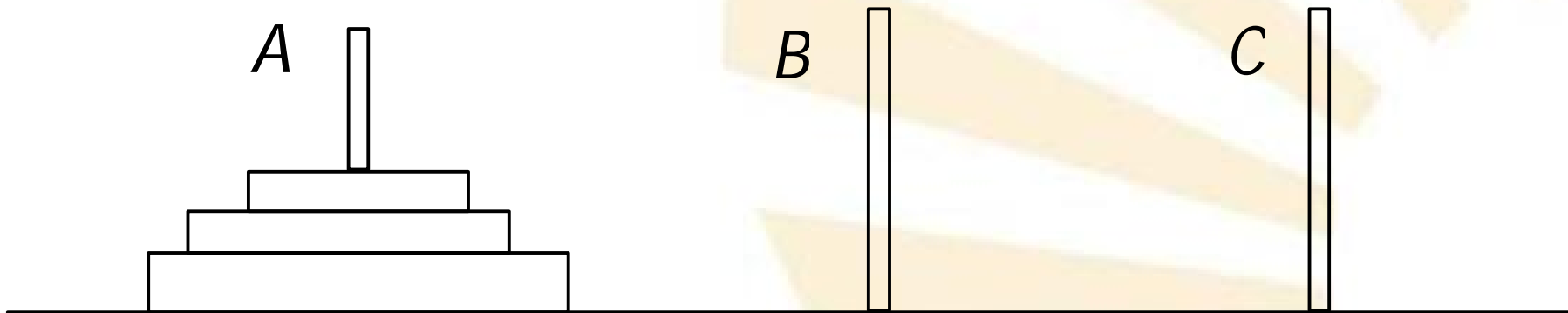
- **Fibonacci** (versión recursiva doble)

- **Árbol de activación**



2. Recursión

- Recursión múltiple
 - **Ejemplo (2/2)**
 - **Torres de Hanoi**



2. Recursión

- Recursión múltiple

- **Ejemplo (2/2)**

- **Torres de Hanoi: objetivo**

- ❑ **Trasladar** todos los discos desde la varilla *A* hasta la varilla *B*
- ❑ Se deben respetar las **reglas** de los movimientos
- ❑ Se puede utilizar la varilla **auxiliar** *C*

2. Recursión

- Recursión múltiple

- **Ejemplo (2/2)**

- **Torres de Hanoi: reglas**

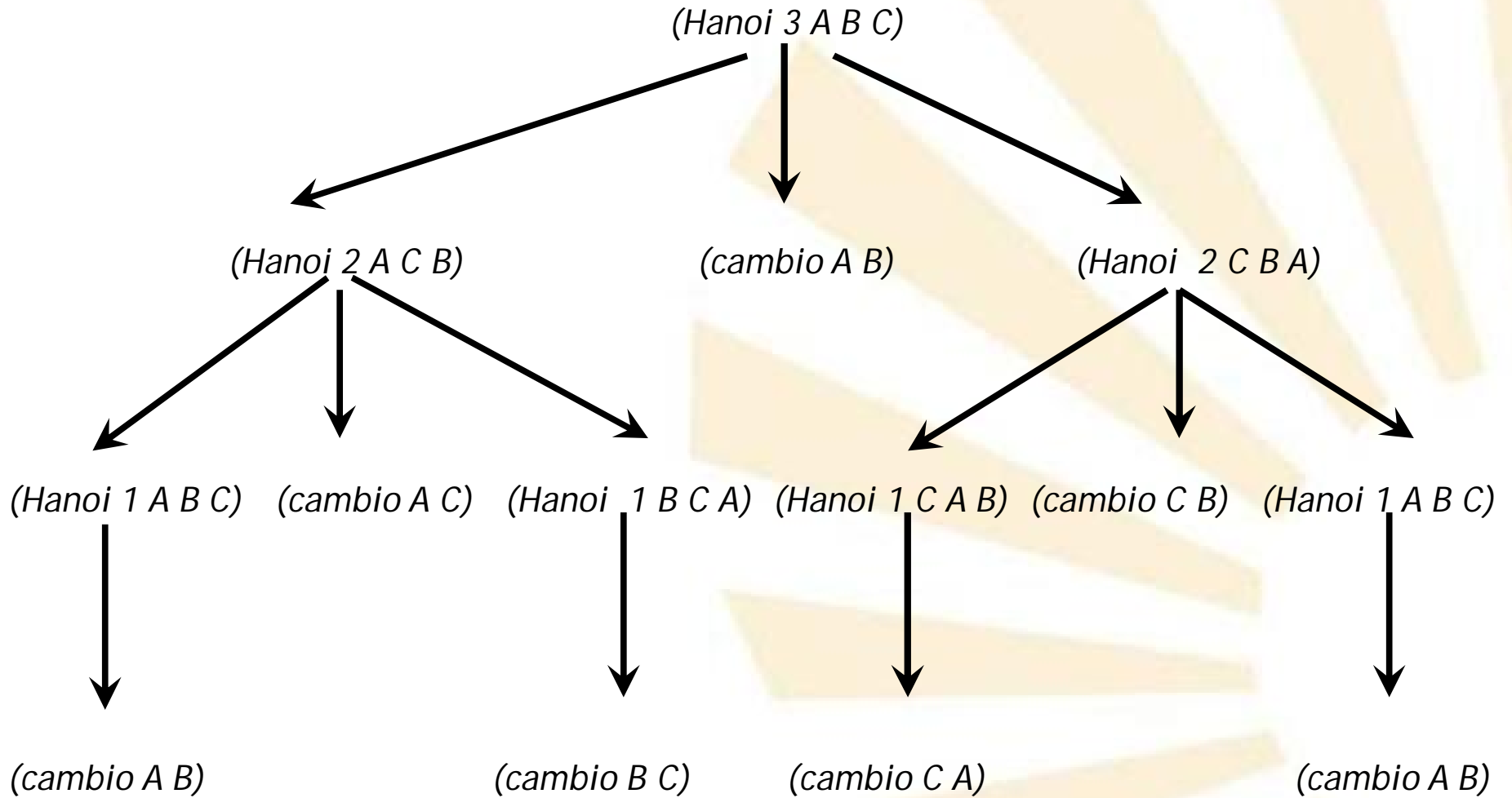
1. Todos los discos son de **tamaños diferentes**.
2. Inicialmente cada uno de los discos **descansa** sobre uno mayor.
3. Sólo se puede **mover un disco** cada vez.
4. **Ningún** disco se puede colocar sobre uno más pequeño.

- **Torres de Hanoi**

```
(define (Hanoi n a b c)
  (define (cambio x y)
    (display x)
    (display " --> ")
    (display y)
    (display "; ")
    1
  )
  ;; cuerpo de "Hanoi"
  (if (= n 1) (cambio a b)
    (+
      (Hanoi (- n 1) a c b)
      (cambio a b)
      (Hanoi (- n 1) c b a)
    )
  )
)
```

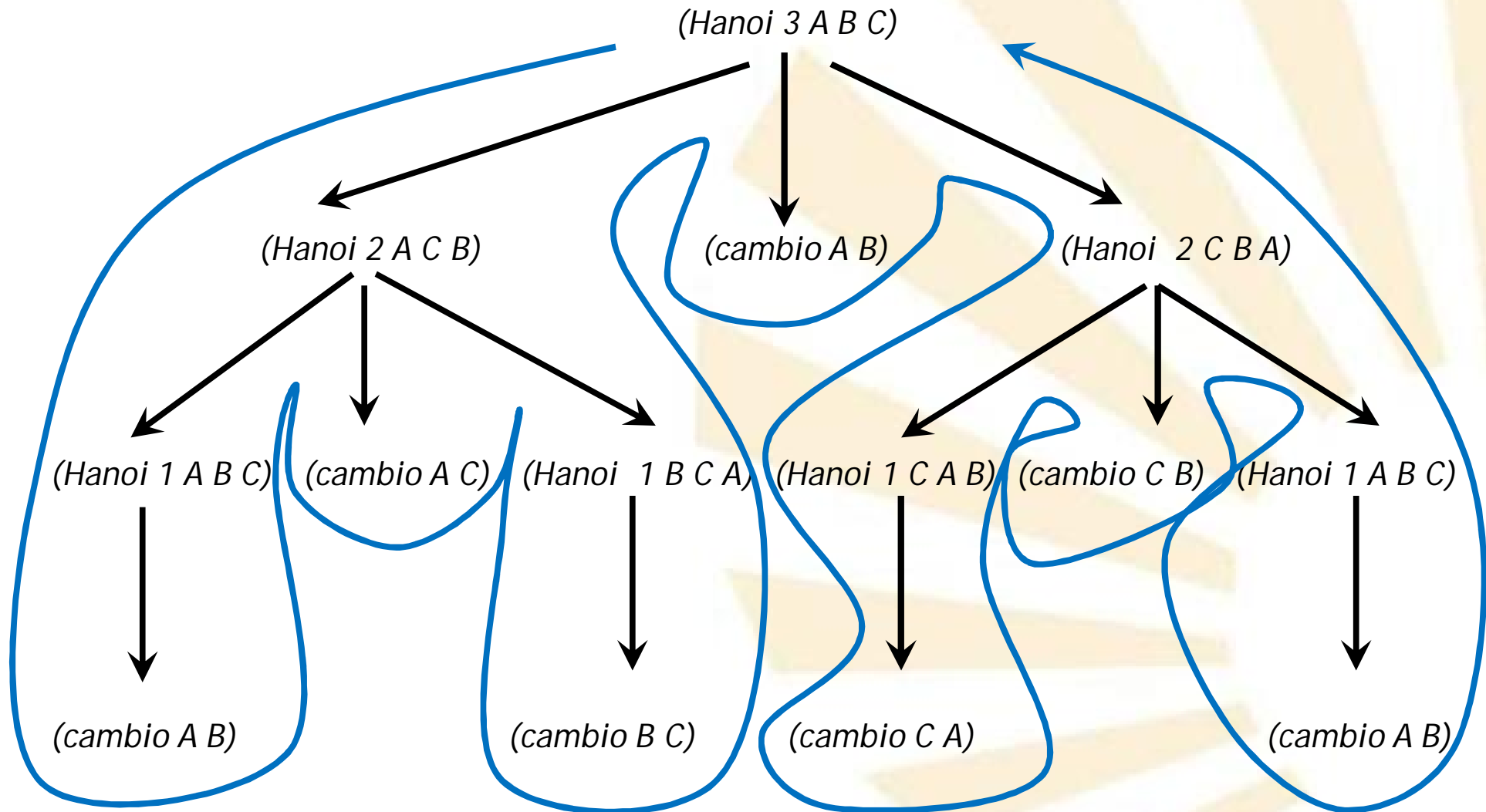
- Torres de Hanoi

Árbol de activación



- Torres de Hanoi

Recorrido en profundidad



2. Recursión

- Recursión múltiple

- **Ejemplo (2/2)**

- **Torres de Hanoi: 7 movimientos**

1. $A \rightarrow B$

2. $A \rightarrow C$

3. $B \rightarrow C$

4. $A \rightarrow B$

5. $C \rightarrow A$

6. $C \rightarrow B$

7. $A \rightarrow B$

2. Recursión

- Descripción
- Recursión simple
- Recursión múltiple
- Recursión de cola
- Forma especial “let con nombre”

2. Recursión

- Recursión de cola
 - Concepto de “reducción”
 - Definición de “recursión de cola”
 - Ejemplo
 - Comparación
 - Más ejemplos

2. Recursión

- Recursión de cola
 - **Concepto de “reducción”**
 - **Transformación** de un problema en **otro más simple**
 - que no requiere **ningún** cálculo adicional cuando haya sido resuelto.

2. Recursión

- Recursión de cola

- **Definición de “recursión de cola”**

- Una función es recursiva de cola si todas sus transformaciones son **reducciones**
 - Término en inglés: ***“tail recursive”***

2. Recursión

- Recursión de cola
 - **Ejemplo (1/5)**
 - Factorial

$$f(n) = n! = \begin{cases} 1 & \text{si } (n = 0) \vee (n = 1) \\ n \times (n - 1)! & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

2. Recursión

- Recursión de cola

- **Ejemplo (1/5)**

- Factorial

```
(define (fac-cola n)
  ;; función auxiliar
  (define (fac-aux n resultado)
    (if (= n 0) resultado
        (fac-aux (- n 1) (* n resultado))
    )
  )
  ;; cuerpo de "fac-cola"
  (fac-aux n 1)
)
```

(fac-cola 4) → 24

2. Recursión

- Recursión de cola

- **Ejemplo (1/5)**

- Factorial

- Proceso "recursivo de cola"

(fac-cola 4)

(fac-aux 4 1)

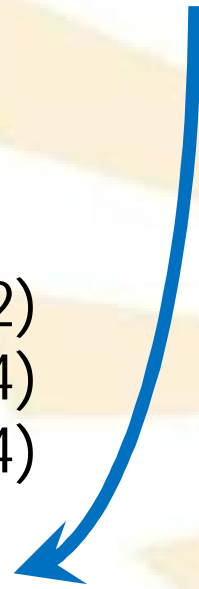
(fac-aux 3 4)

(fac-aux 2 12)

(fac-aux 1 24)

(fac-aux 0 24)

24



2. Recursión

- Recursión de cola

- **Ejemplo (1/5)**

- Factorial

- Proceso "recursivo lineal"

Expansión

(factorial 4)
(* 4 (factorial 3))
(* 4 (* 3 (factorial 2)))
(* 4 (* 3 (* 2 (factorial 1))))
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (factorial 0))))))

Contracción

(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
(* 4 (* 3 (* 2 1)))
(* 4 (* 3 2))
(* 4 6)
24

2. Recursión

- Recursión de cola
 - **Comparación**
 - Proceso “recursivo lineal”
 - Proceso “recursivo de cola”

2. Recursión

- Recursión de cola

- **Comparación**

- Proceso "recursivo lineal"

- **Expansión**

- ✓ Se efectúan las llamadas recursivas

- ✓ Se encadenan una serie de operaciones "diferidas"

- **Contracción**

- ✓ Evalúa las operaciones "diferidas"

2. Recursión

- Recursión de cola

- **Comparación**

- Proceso “recursivo lineal”

- **Observación**

- ✓ El intérprete debe

- **almacenar** los operadores y argumentos de las operaciones diferidas

- **recordar** el orden en el que se deben evaluar dichas operaciones diferidas

2. Recursión

- Recursión de cola

- **Comparación**

- Proceso “recursivo lineal”

- **Observación**

- ✓ Necesita conocer **información adicional** “escondida”
 - mantenida por el intérprete
 - no contenida en las variables
- ✓ Esta información indica **qué** operaciones diferidas están pendientes de realizar

2. Recursión

- Recursión de cola

- **Comparación**

- Proceso “recursivo de cola”

- ❑ Las **variables** del programa suministran una **descripción completa** del estado en el que se encuentra el proceso de ejecución.
- ❑ En cada paso, el número de operaciones es conocido **“a priori”**.
- ❑ **No** necesita “operaciones diferidas”

2. Recursión

- Recursión de cola

- **Ejemplo (2/5)**
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

(**define** (suma-reciprococos-cuadrados-perfectos n)

(**define** (termino n)

(/ 1.0 (* n n))

)

(**define** (auxiliar n resultado)

(if (<= n 0)

resultado

(auxiliar (- n 1) (+ resultado (termino n))))

)

)

;; Llamada a la función auxiliar

(auxiliar n 0.0)

)

2. Recursión

- Recursión de cola

- **Ejemplo (3/5)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3) \times (4n-1)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{9 \times 11} + \dots = \frac{\pi}{8}$$

```
(define (suma-pi-octavos n)
```

```
  (define (termino n)
```

```
    (/ 1.0
```

```
       (* (- (* 4 n) 3) (- (* 4 n) 1) )
```

```
    )
```

```
  )
```

```
(define (auxiliar i n resultado)
```

```
  (if (> i n) resultado
```

```
      (auxiliar (+ i 1) n (+ resultado (termino i))))
```

```
  )
```

```
)
```

```
;; Llamada a la función auxiliar
```

```
(auxiliar 1 n 0.0)
```

```
)
```

2. Recursión

- Recursión de cola

- **Ejemplo (4/5)**

- (**define** (serie-seno x n)

- (**define** (termino x n)

- (* (expt -1 n)

- (/ (expt x (+ (* 2 n) 1)) (factorial (+ (* 2 n) 1)))

-)

-)

- (**define** (*auxiliar* x n resultado)

- (if (< n 0)

- resultado

- (*auxiliar* x (- n 1) (+ (termino x n) resultado))

-)

-)

- :: Llamada a la función auxiliar*

- (*auxiliar* x n 0.0)

-)

$$\text{seno}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

2. Recursión

- Recursión de cola

- **Ejemplo (5/5)**

- Raíz cuadrada usando el **método de Newton**

$$x_0 = 1$$

$$\longrightarrow \frac{x}{x_n} + x_n$$
$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} \quad \text{si } n \geq 1$$


$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y = \sqrt{x} \longleftarrow$$


2. Recursión

- Recursión de cola

- **Ejemplo (5/5)**

- Raíz cuadrada usando el método de Newton

$$y = \sqrt{2}$$



$$x_0 = 1.0$$



2. Recursión




- Recursión de cola

- **Ejemplo (5/5)**

- Raíz cuadrada usando el método de Newton

$$y = \sqrt{2}$$


$$x_0 = 1.0$$



$$x_1 = \frac{\frac{2}{1} + 1}{2} = 1.5$$



2. Recursión



- Recursión de cola

- **Ejemplo (5/5)**

- Raíz cuadrada usando el método de Newton

$$y = \sqrt{2}$$


$$x_0 = 1.0 \quad x_1 = \frac{\frac{2}{1} + 1}{2} = 1.5$$



$$x_2 = \frac{\frac{2}{1.5} + 1.5}{2} = 1.41\hat{6}$$


2. Recursión

- Recursión de cola

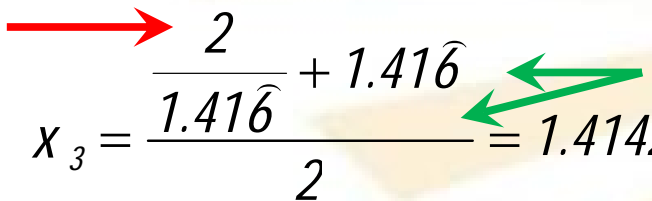
- **Ejemplo (5/5)**

- Raíz cuadrada usando el método de Newton

$$y = \sqrt{2}$$


$$x_0 = 1.0 \quad x_1 = \frac{\frac{2}{1} + 1}{2} = 1.5$$

$$x_2 = \frac{\frac{2}{1.5} + 1.5}{2} = 1.41\hat{6} \quad \leftarrow$$


$$\rightarrow x_3 = \frac{\frac{2}{1.41\hat{6}} + 1.41\hat{6}}{2} = 1.41421568$$


2. Recursión

- Recursión de cola

- **Ejemplo (5/5)**


- Raíz cuadrada usando el método de Newton

$$y = \sqrt{2}$$


$$x_0 = 1.0$$

$$x_1 = \frac{\frac{2}{1} + 1}{2} = 1.5$$

$$x_2 = \frac{\frac{2}{1.5} + 1.5}{2} = 1.41\hat{6}$$

$$x_3 = \frac{\frac{2}{1.41\hat{6}} + 1.41\hat{6}}{2} = 1.41421568$$


- Ejemplo (5/5)

- Raíz cuadrada usando el método de Newton

```
(define (raíz x cota_error)
  (define (siguiente x y)
    (/ (+ (/ x y) y) 2.))
  (define (raíz-aux x y)
    (if (< (abs (- (* y y) x)) cota_error)
        y
        (raíz-aux x (siguiente x y))))
  )
  )
  ;; cuerpo de "raíz": llamada a la función auxiliar
  (raíz-aux x 1.0)
)
```

(raíz 2 0.001) → 1.41421568

- **Ejemplo (5/5)**

- **Raíz cuadrada usando el método de Newton**

(*raíz* 2 0.001)

(*raíz-aux* 2 1.0)

(*raíz-aux* 2 1.5)

(*raíz-aux* 2 1.41666...)

(*raíz-aux* 2 1.41411568)

→ 1.41421568

2. Recursión

- Descripción
- Recursión simple
- Recursión múltiple
- Recursión de cola
- Forma especial “let con nombre”

2. Recursión

- Forma especial “let con nombre”

- **Sintaxis**

(let <nombre-función>

:: Asignación inicial a los parámetros

(

(<parámetro₁> <inicialización₁>)

(<parámetro₂> <inicialización₂>)

...

(<parámetro_n> <inicialización_n>)

)

:: cuerpo del “let con nombre”,

:: se puede llamar recursivamente a

:: <nombre-función>

<sentencia> ...

)

2. Recursión

- Forma especial “let con nombre”
 - **Significado**
 - Se evalúan en un orden **no** determinado las **sentencias de inicialización** de los parámetros
 - Se ejecuta el **cuerpo** de “let con nombre”
 - Si hay una **llamada recursiva** entonces los valores de los argumentos reales se asignan a los parámetros de **let**.
 - Término en inglés: *named let*

2. Recursión

- Forma especial “let con nombre”

- **Ejemplo**

```
(define (factorial-let-nombre n)
```

```
  (let fact-let
```

```
    ;; Asignación inicial a los parámetros
```

```
    (
```

```
      (i          n)
```

```
      (resultado 1)
```

```
    )
```

```
    ;; cuerpo de let con nombre
```

```
    (if (or (= i 0) (= i 1))
```

```
      resultado
```

```
      ;; llamada recursiva
```

```
      (fact-let (- i 1) (* resultado i))
```

```
    )
```

```
  )
```

```
)
```

Índice

1. Forma especial iterativa "do"
2. Recursión
3. Funciones pasadas como parámetros
4. Funciones devueltas como resultados

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Descripción**
- **Ejemplos**
- **Aplicaciones**

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Descripción**
- **Ejemplos**
- **Aplicaciones**



3. Funciones pasadas como parámetros

- **Descripción**

- **Función f que recibe una función g como parámetro formal**

*(define (f pf₁ pf₂ ... pf_i **g** pf_{i+1} ... pf_n)*

<cuerpo de f>

)

donde $pf_1, pf_2, \dots, pf_i, \mathbf{g}, pf_{i+1}, \dots, pf_n$
son los parámetros formales de f

- **Observación**

- Solamente hay que **poner un nombre** al **parámetro formal** que va a actuar como **función**

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Descripción**

- **Uso de g dentro de la función f**

$$(g \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_k)$$

donde x_1, x_2, \dots, x_k

son los parámetros reales de g

- **Observación**

- Solamente hay que **llamar** a la **función** con los **parámetros reales** que le correspondan.

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Descripción**

- **Paso de una función como parámetro de otra función *f***

1. Función definida previamente

2. Función creada con *lambda*

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Descripción**

- **Paso de una función como parámetro de otra función f**

1. Función definida previamente

(define (h ...)

<cuerpo de h>

)

...

(f pr₁ pr₂ ... pr_i h pr_{i+1} ... pr_n)

donde $pr_1, pr_2, \dots, pr_i, h, pr_{i+1}, \dots, pr_n$

son los parámetros **reales** de f

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Descripción**

- Paso de una función como parámetro de otra función ***f***

2. Función creada con **lambda**

(***f*** $pr_1 pr_2 \dots pr_i$
 (**lambda** (<parámetros> <cuerpo>)
 $pr_{i+1} \dots pr_n$
)

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Descripción**
- **Ejemplos**
- **Aplicaciones**

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Ejemplos**

- **Función que recibe otra función como parámetro**

```
(define (duplicar g x)  
  (* 2 (g x))  
)
```

Uso de la función

Función pasada como parámetro

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Ejemplos**

- **Función que recibe otra función como parámetro**

1. Función **definida** previamente

```
(define (duplicar g x)
```

```
  (* 2 (g x))
```

```
)
```

```
(define (cuadrado x)
```

```
  (* x x)
```

```
)
```

```
(duplicar cuadrado 7) → 98
```

Función pasada como parámetro

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Ejemplos**

- **Función que recibe otra función como parámetro**

2. Función creada con **lambda** (1/2)

```
(define (duplicar g x)
```

```
  (* 2 (g x))
```

```
)
```

```
(duplicar (lambda (x) (* x x)) 7) → 98
```

Función lambda pasada como parámetro

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Ejemplos**

- **Función que recibe otra función como parámetro**

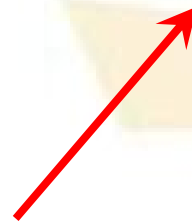
2. Función creada con **lambda** (2/2)

```
(define (duplicar g x)
```

```
  (* 2 (g x))
```

```
)
```

```
(duplicar (lambda (x) (+ x 1)) 7) → 16
```



Función lambda pasada como parámetro

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Descripción**
- **Ejemplos**
- **Aplicaciones**
 - **Series numéricas**
 - **Raíz de una función mediante bisección**

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Descripción**
- **Ejemplos**
- **Aplicaciones**
 - **Series numéricas**
 - **Raíz de una función mediante bisección**

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - Ejemplos preparatorios
 - Suma de cubos
 - Suma de pi-octavos
 - Estructura general de los ejemplos preparatorios
 - Función que **suma** cualquier serie numérica
 - Series **no** paramétricas
 - Series **paramétricas**

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - **Ejemplos preparatorios: suma de cubos**

$$\sum_{n=a}^b n^3 = a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 + \dots + (b-1)^3 + b^3$$

```
(define (suma-cubos inicial final)
  ;; función auxiliar
  (define (cubo x) (* x x x))
  ;; cuerpo de suma-cubos
  (if (> inicial final)
    0
    (+
     (cubo inicial)
     (suma-cubos (+ inicial 1) final)
    )
  )
)
```

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - **Ejemplos preparatorios: suma de cubos**

$$\sum_{n=a}^b n^3 = a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 + \dots + (b-1)^3 + b^3$$

(define (suma-cubos inicial final)

:: función auxiliar

(define (cubo x) (* x x x))

:: cuerpo de suma-cubos

(if (> inicial final)

Siguiente elemento de la serie

0

(+

Término de la serie

(cubo inicial)

(suma-cubos (+ inicial 1) final)

)

)

)

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - **Ejemplos preparatorios: pi octavos**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \times (n+2)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{9 \times 11} + \dots = \frac{\pi}{8}$$

```
(define (suma-pi-octavos inicial final)
  (define (termino n)
    (/ 1.0 (* n (+ n 2.0))))
  )
  (if (> inicial final)
    0
    (+
      (termino inicial)
      (suma-pi-octavos (+ inicial 4.0) final)
    )
  )
)
```

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**

- **Ejemplos preparatorios: pi octavos**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \times (n+2)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{9 \times 11} + \dots = \frac{\pi}{8}$$

(define (suma-pi-octavos inicial final)

(define (termino n)

(/ 1.0 (n (+ n 2.0))))*

)

(if (> inicial final)

0

(+

(termino inicial)

(suma-pi-octavos (+ inicial 4.0) final)

)

)

)

Siguiente elemento de la serie

Término de la serie

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - **Estructura general de los ejemplos preparatorios**

```
(define (<nombre> inicial final)
  (if (> inicial final)
    0
    (+
      (<término> inicial)
      (<nombre> (<siguiente> inicial) final)
    )
  )
)
```

- **Observación**
 - Las funciones *término* y *siguiente* son **externas**

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - **Función que suma cualquier serie numérica no paramétrica**

$$serie = \sum_{n=inicio}^{final} t(n)$$

$n = n + s(n)$

donde

- **t**: término general de la serie
- **s**: siguiente elemento

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - **Función que suma cualquier serie numérica **no** paramétrica: versión **recursiva****

$$serie = \sum_{n=inicio}^{final} t(n)$$

$n = n + s(n)$

```
(define (sumar-serie término siguiente inicial final)
```

```
  (if (> inicial final)
```

```
    0
```

```
    (+
```

```
      (término inicial)
```

```
      (sumar-serie término siguiente (siguiente inicial) final)
```

```
    )
```

```
  )
```

```
)
```

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - **Función que suma cualquier serie numérica **no** paramétrica: versión **recursiva****

Paso de las funciones como parámetros



```
(define (sumar-serie término siguiente inicial final)
```

```
  (if (> inicial final)
```

Uso de la función

```
    0
```

```
    (+
```

```
      (término inicial)
```

```
      (sumar-serie término siguiente (siguiente inicial) final)
```

```
    )
```

```
  )
```

```
)
```



Paso de las funciones como parámetros

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - **Función que suma cualquier serie numérica no paramétrica: versión recursiva. Ejemplo 1/7**

$$\sum_{n=a}^b n^3 = a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 + \dots + (b-1)^3 + b^3$$

;; función que calcula el término de la serie
(define (cubo x) (x x x))*

;; función para obtener el "siguiente" elemento
(define (suma-uno x) (+ x 1.0))

;; llamada a sumar-serie
(sumar-serie cubo suma-uno 1 3) → 36.0

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - **Función que suma cualquier serie numérica **no** paramétrica: versión **recursiva**. Ejemplo 2/7**

$$\sum_{n=a}^b n^3 = a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 + \dots + (b-1)^3 + b^3$$

∴ llamada a sumar-serie usando funciones anónimas

(sumar-serie

(lambda (x) (x x x))*

(lambda (x) (+ x 1))

1

3

) → 36.0

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - **Función que suma cualquier serie numérica no paramétrica: versión recursiva. Ejemplo 3/7**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \times (n+2)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{9 \times 11} + \dots = \frac{\pi}{8}$$

;; función que calcula el término de la serie

```
(define (termino-pi x)
  (/ 1.0 (* x (+ x 2.0))))
)
```

;; función para obtener el "siguiente" elemento

```
(define (siguiente-pi x) (+ x 4))
```

;; llamada a la función sumar-serie

```
(* 8.0 (sumar-serie termino-pi siguiente-pi 1 10000))
```

→ 3.14139265

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - **Función que suma cualquier serie numérica no paramétrica: versión recursiva. Ejemplo 4/7**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

;; función que calcula el término de la serie
(define (termino n)
 (/ 1.0 (* n n))
)

;; función para obtener el "siguiente" elemento
(define (siguiente n) (+ n 1))

;; llamada a la función sumar-serie
(sumar-serie termino siguiente 1 1000)
→ 1.6439...

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - **Función que suma cualquier serie numérica no paramétrica: versión recursiva. Ejemplo 5/7**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots = e = 2,71828 18284 \dots$$

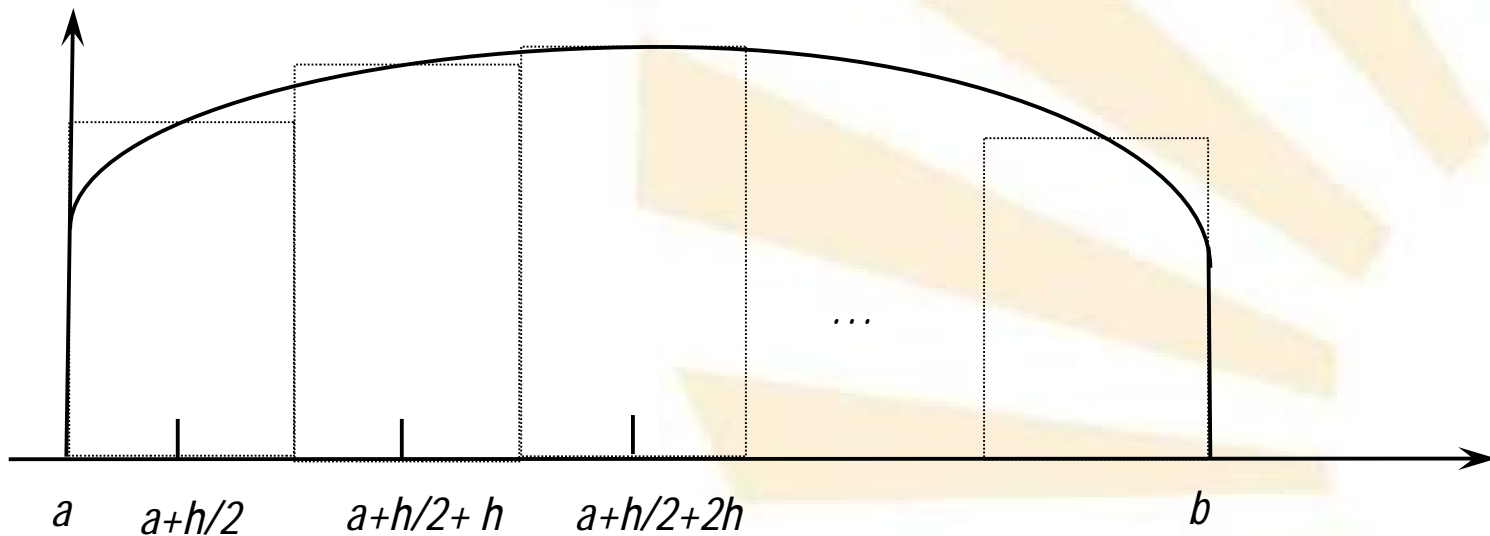
;; función que calcula el término de la serie
(*define* (*termino* *n*)
 (/ 1.0 (*factorial* *n*))
)

;; función para obtener el "siguiente" elemento
(*define* (*siguiente* *n*) (+ *n* 1))

;; llamada a la función sumar-serie
(*sumar-serie termino siguiente* 1 10)
→ 2.7182818284...

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - **Función que suma cualquier serie numérica **no** paramétrica: versión **recursiva****
 - **Ejemplo 6/7: **integral definida****



$$\int_a^b f(x) = (f(a+h/2) + f(a+h/2+h) + f(a+h/2+2h) + \dots) \times h$$

- “h” debe ser suficientemente pequeño

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - **Función que suma cualquier serie numérica no paramétrica: versión recursiva**
 - **Ejemplo 7/7: integral definida**

```
(define (integral f inicial final h)
  ;; función para obtener el siguiente elemento
  (define (sumar-h x) (+ x h))
  ;; cuerpo de integral
  (*
    (sumar-serie f sumar-h (+ inicial (/ h 2)) final)
    h
  )
)
```

```
(define (f x) x)
```

```
(integral f 0 1 0.001) → 0.50000000
```

```
(integral (lambda (x) x) 0 1 0.001) → 0.50000000
```

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - **Función que suma cualquier serie numérica **no** paramétrica: versión iterativa**

```
(define (sumar-serie-v2 termino siguiente inicial final)
  (do
    (
      (i inicial (siguiente i))
      (resultado 0 (+ resultado (termino i)))
    )
    ;;
    ((> i final) resultado)
    ;; No hay cuerpo
  )
)
```

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - **Función que suma cualquier serie numérica **no** paramétrica: versión iterativa. Ejemplo.**

$$\sum_{n=a}^b n^3 = a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 + \dots + (b-1)^3 + b^3$$

;; función que calcula el término de la serie
(define (cubo x) (* x x x))

;; función para obtener el "siguiente" elemento
(define (siguiente n) (+ n 1))

;; llamada a la función
(sumar-serie-v2 cubo siguiente 1 3) → 36.0

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - **Función que suma cualquier serie numérica paramétrica**

$$serie(x) = \sum_{\substack{n=initial \\ n=n+s(n)}}^{final} t(x,n)$$

donde

- x : parámetro
- t : término general de la serie
- s : siguiente elemento

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - **Función que suma cualquier serie numérica**
paramétrica: versión recursiva

```
(define (sumar-serie-paramétrica término siguiente inicial final x)
  (if (> inicial final)
      0
      (+
        (término x inicial)
        (sumar-serie-paramétrica
         término siguiente (siguiente inicial) final x)
       )
    )
)
```

The diagram illustrates the recursive call in the function definition. A yellow box labeled "parámetro" has three red arrows pointing to the arguments of the recursive call: "término" (the first argument), "siguiente" (the second argument), and "x" (the third argument).

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - **Función que suma cualquier serie numérica**
paramétrica: versión iterativa

```
(define (sumar-serie-paramétrica término siguiente inicial final x)
  (do
    (
      (i inicial (siguiente i))
      (resultado 0.0 (+ resultado (término x i)))
    )
    ;;
    ((> i final) resultado)
    ;; No hay cuerpo
  )
)
```

A yellow box labeled "parámetro" has two red arrows pointing to the variable `x` in the function definition and the expression `(término x i)` in the function body.

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - **Función que suma cualquier serie numérica paramétrica: versión iterativa. Ejemplo.**

;; término de la serie

(define (término-seno x n)

((expt -1 n)*

(/

(expt x (+ (2 n) 1))*

(factorial (+ (2 n) 1))*

)

)

)

;; función para obtener el "siguiente" elemento

(define (incrementar-uno n)

(+ n 1)

)

$$\textit{seno}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: series numéricas**
 - **Función que suma cualquier serie numérica paramétrica: versión iterativa. Ejemplo.**

$$\text{seno}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(sumar-serie-paramétrica

término-seno

incrementar-uno

0

100

(/ pi 2.0)

)

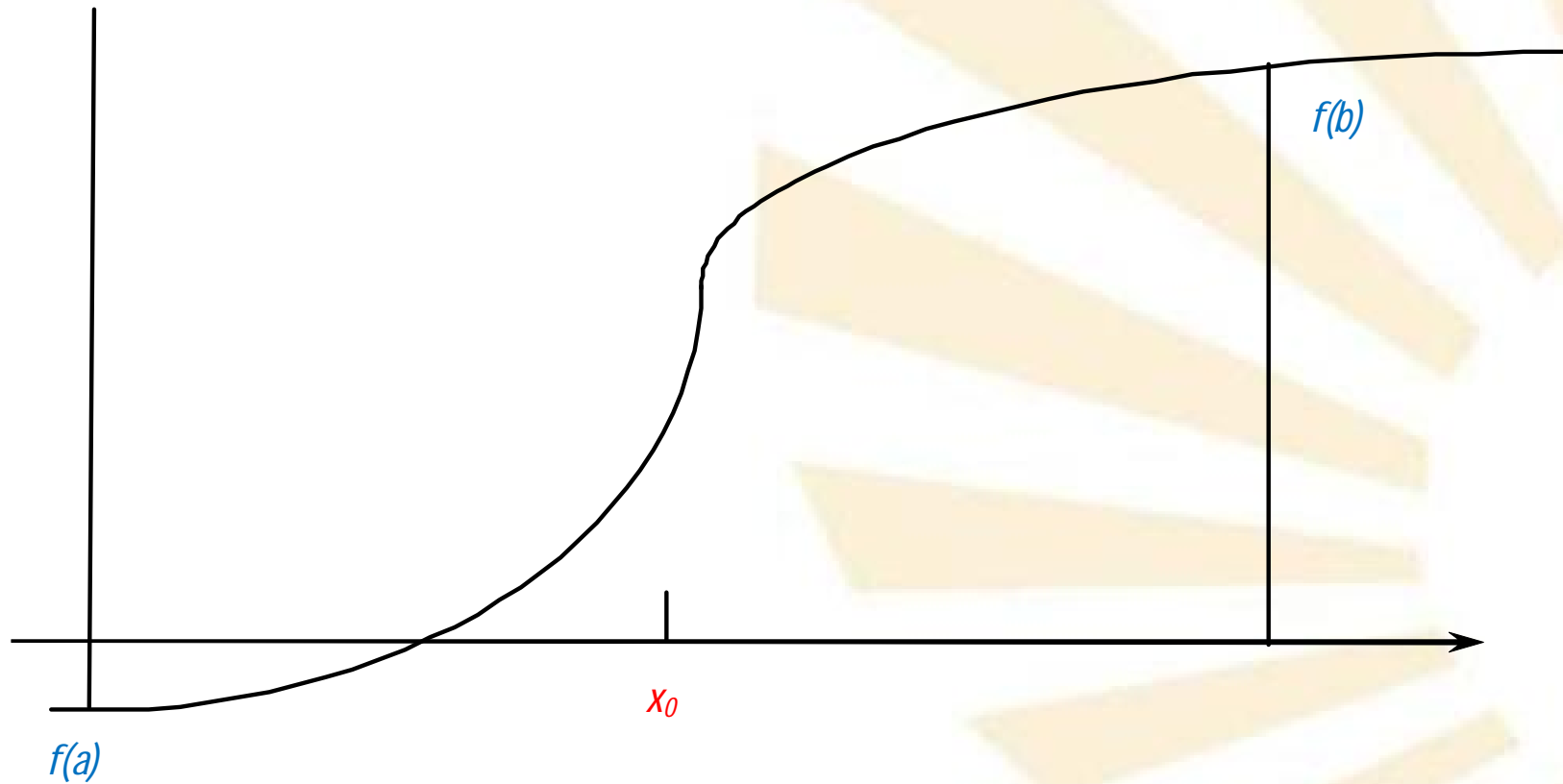
→ 1.0000000000000000002

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Descripción**
- **Ejemplos**
- **Aplicación**
 - **Series numéricas**
 - **Raíz de una función mediante bisección**

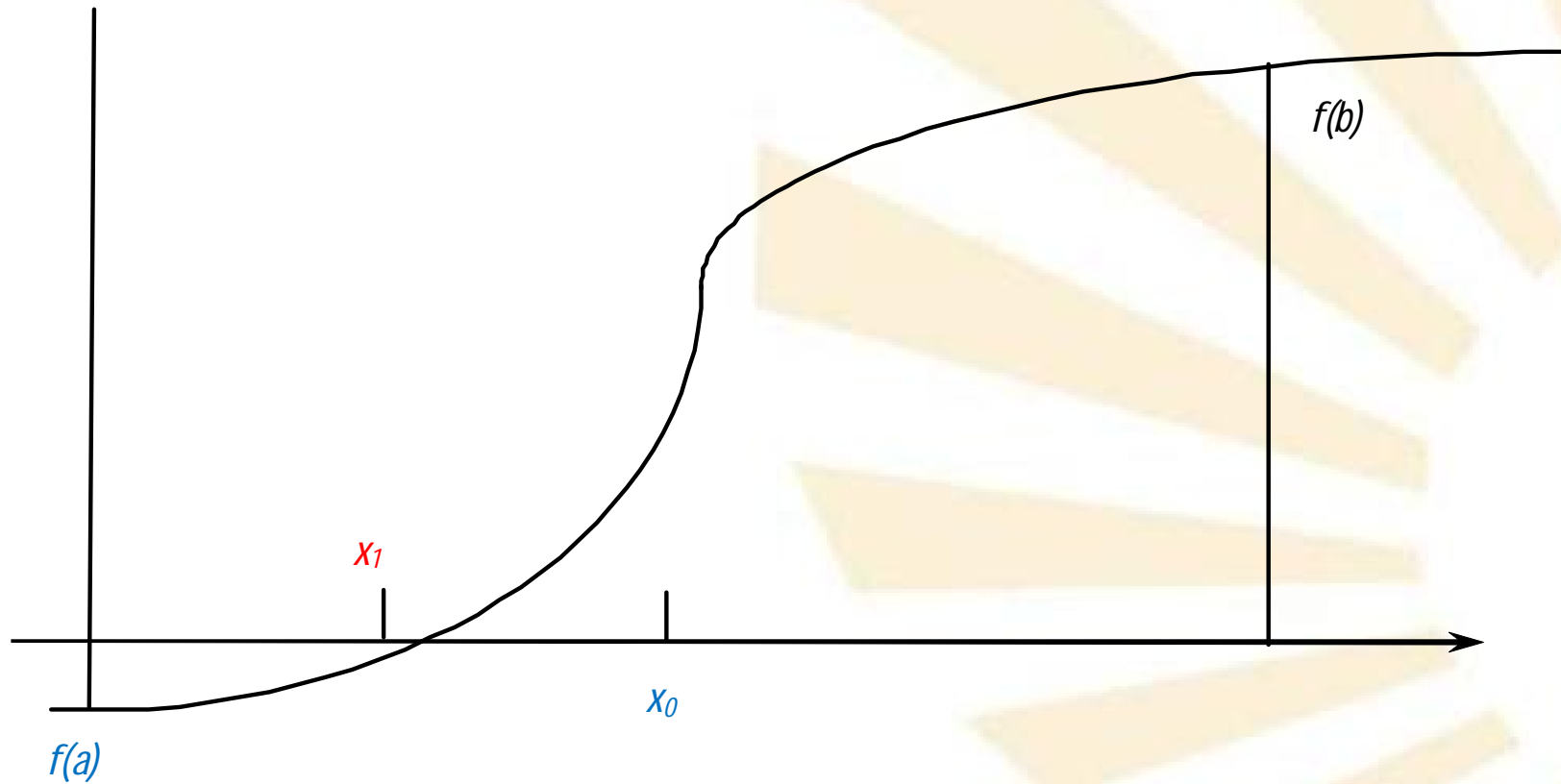
3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: raíz de una función mediante bisección**



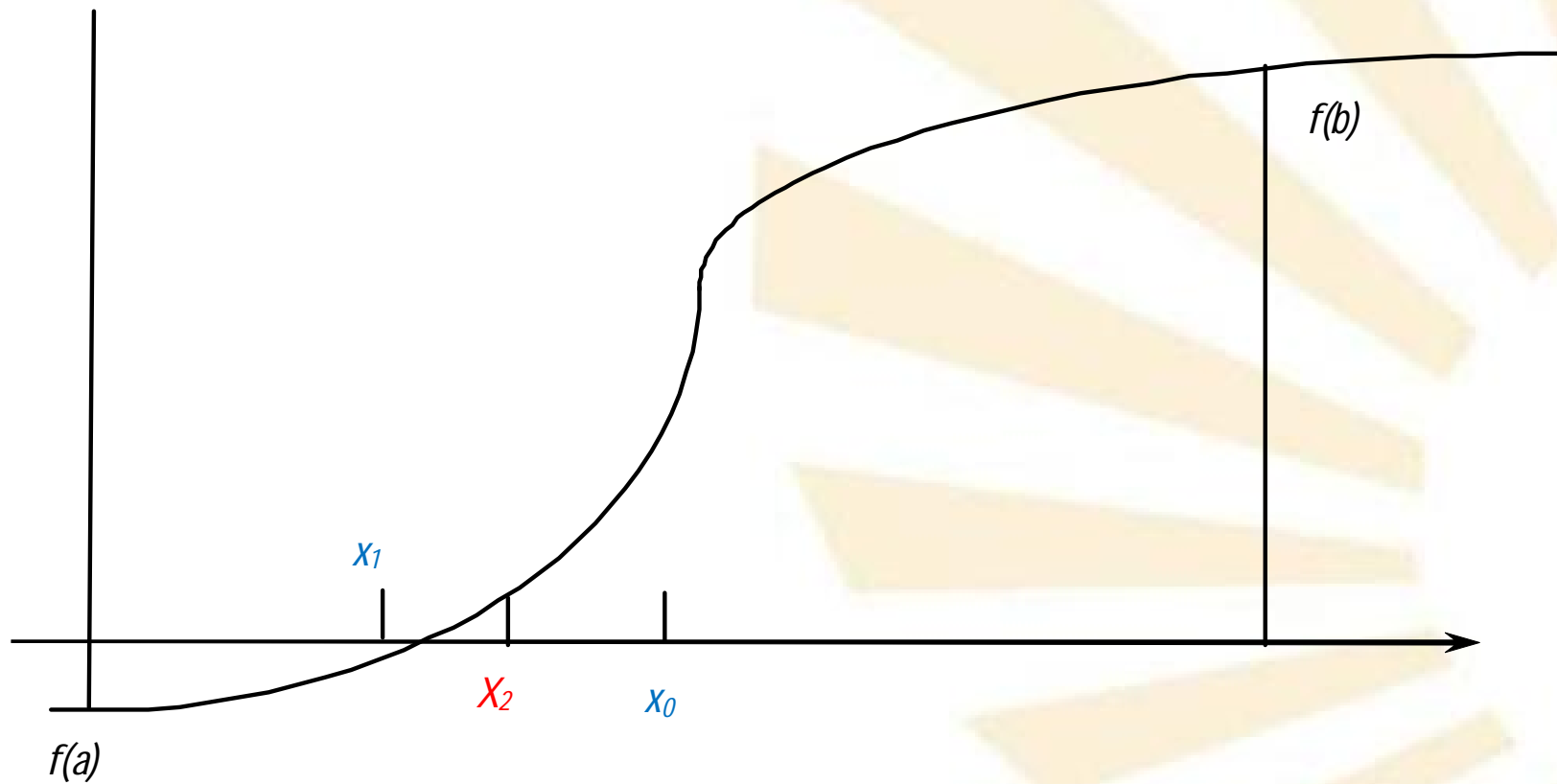
3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: raíz de una función mediante bisección**



3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: raíz de una función mediante bisección**



3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: raíz de una función mediante bisección**

- **Restricción**

- **$f(a)$ y $f(b)$ deben tener signos diferentes**

$$f(a) * f(b) < 0$$

- Por ejemplo:

- $f(a) < 0$

- $f(b) > 0$

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: raíz de una función mediante bisección**
 - **Funciones auxiliares**

```
(define (cercanos? x y)  
  (< (abs (- x y)) 0.001)  
)
```

```
(define (promedio x y)  
  (/ (+ x y) 2.0)  
)
```


3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: raíz de una función mediante bisección**

- **Funciones auxiliares**

```
(define (cercanos? x y)  
  (< (abs (- x y)) 0.001)  
)
```

```
(define (promedio x y)  
  (/ (+ x y) 2.0)  
)
```

Se puede parametrizar

- **Aplicación: raíz de una función mediante bisección**

```
(define (buscar f negativo positivo)
  (define (ceranos? x y)
    (< (abs (- x y)) 0.001) )
  (define (promedio x y)
    (/ (+ x y) 2.0) )
  ;; cuerpo de buscar
  (let ;; Variable local
    ((mitad (promedio negativo positivo)))
    ;; Cuerpo de let
    (if (ceranos? negativo positivo)
        mitad
        (let ;; variable local
            ((valor (f mitad)))
            ;; cuerpo del let anidado
            (cond
              ((positive? valor) (buscar f negativo mitad))
              ((negative? valor) (buscar f mitad positivo))
              (else mitad)
            )
          )
        )
    )
  )
)
```

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: raíz de una función mediante bisección**

- Llamada la función “**buscar**”

```
(define (f x)
```

```
  (- (* x x) 2)
```

```
)
```

```
(buscar f 1 3) → 1.41455078
```

;; Modo alternativo

```
(buscar (lambda (x) (- (* x x) 2)) 1 3)
```

```
→ 1.41455078
```

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: raíz de una función mediante bisección**
 - Se va a definir una nueva función denominada ***bisección*** para controlar el signo de ***f(a)*** y ***f(b)***

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: raíz de una función mediante bisección**

```
(define (bisección f a b)
  (let (
    (valor-a (f a))
    (valor-b (f b))
  )
  (cond
    ( (and (negative? valor-a) (positive? valor-b))
      (buscar f a b)
    )
    ( (and (negative? valor-b) (positive? valor-a) )
      (buscar f b a)
    )
  )
  (else (display "los puntos iniciales tienen el mismo signo"))
  )
)
```

3. Funciones pasadas como parámetros

- **Aplicación: raíz de una función mediante bisección**

:: Ejemplo de llamada a la función bisección

(bisección sin 2 4) → 3.14111328

Índice

1. Forma especial iterativa "do"
2. Recursión
3. Funciones pasadas como parámetros
4. Funciones devueltas como resultados

4. Funciones devueltas como resultados

- **Descripción**
- **Ejemplos**
- **Aplicación: método de Newton**

4. Funciones devueltas como resultados

- **Descripción**
- **Ejemplos**
- **Aplicación: método de Newton**

4. Funciones devueltas como resultados

- **Descripción**

- Se puede devolver una **función** como **resultado** de otra función de dos maneras
 1. Devolviendo el **nombre de una función u operador**
 2. Devolviendo una **función creada con lambda**

4. Funciones devueltas como resultados

- **Descripción**
- **Ejemplos**
- **Aplicación: método de Newton**

4. Funciones devueltas como resultados

- **Ejemplo**

1. Devolviendo el nombre de una función u operador

```
(define (elegir opcion f g)  
  (if (even? opcion)  
    f  
    g)  
)
```

4. Funciones devueltas como resultados

- **Ejemplo**

1. Devolviendo el nombre de una función u operador

:: Ejemplos de llamadas a la función devuelta

`((elegir 1 abs sqrt) 9) → 3`

`((elegir 2 * +) 3 4) → 12`

`((elegir 2 (lambda (x) (+ x 1))
 (lambda (x) (* 2 x))
)
 9
) → 10`

4. Funciones devueltas como resultados

- **Ejemplo**

2. Devolviendo una función creada con lambda

```
(define (componer f g)
```

```
  (lambda (x)
```

```
    (f (g x))
```

```
  )
```

```
)
```

;; Llamada a la función devuelta

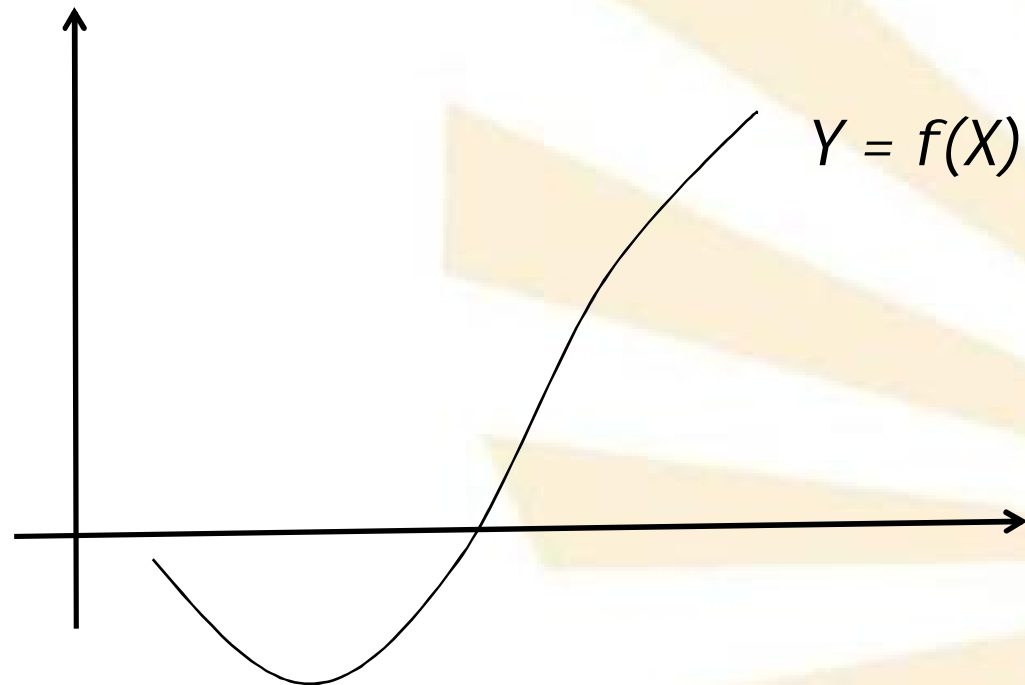
```
( (componer sqrt sqrt) 81) → 3
```

4. Funciones devueltas como resultados

- **Descripción**
- **Ejemplos**
- **Aplicación: método de Newton**

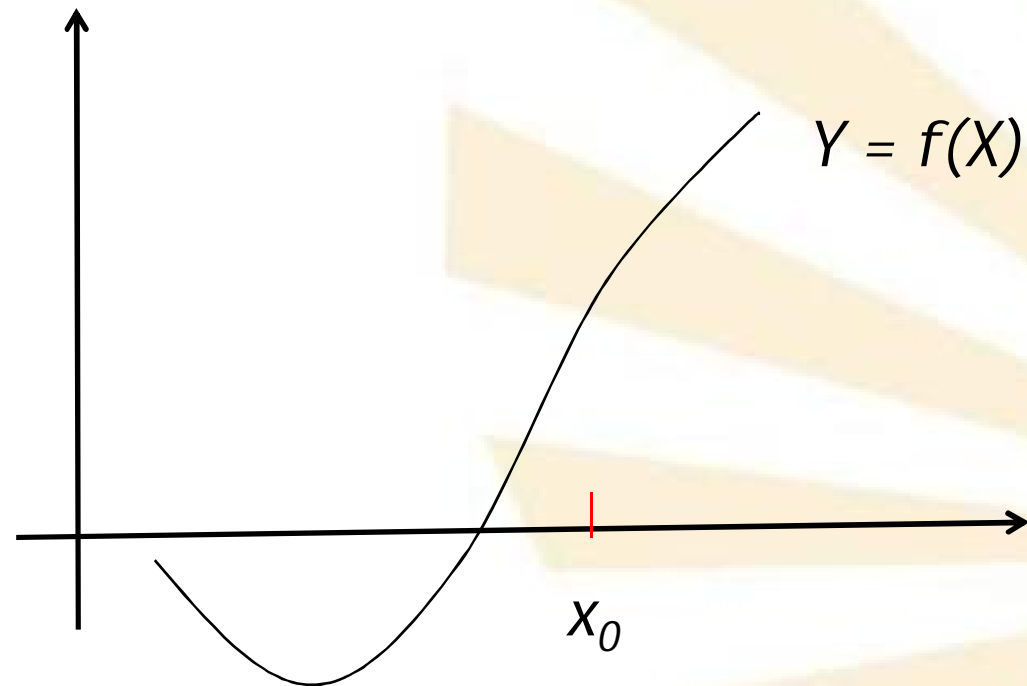
4. Funciones devueltas como resultados

- **Aplicación: método de Newton** para calcular la raíz de cualquier función



4. Funciones devueltas como resultados

- **Aplicación: método de Newton** para calcular la raíz de cualquier función

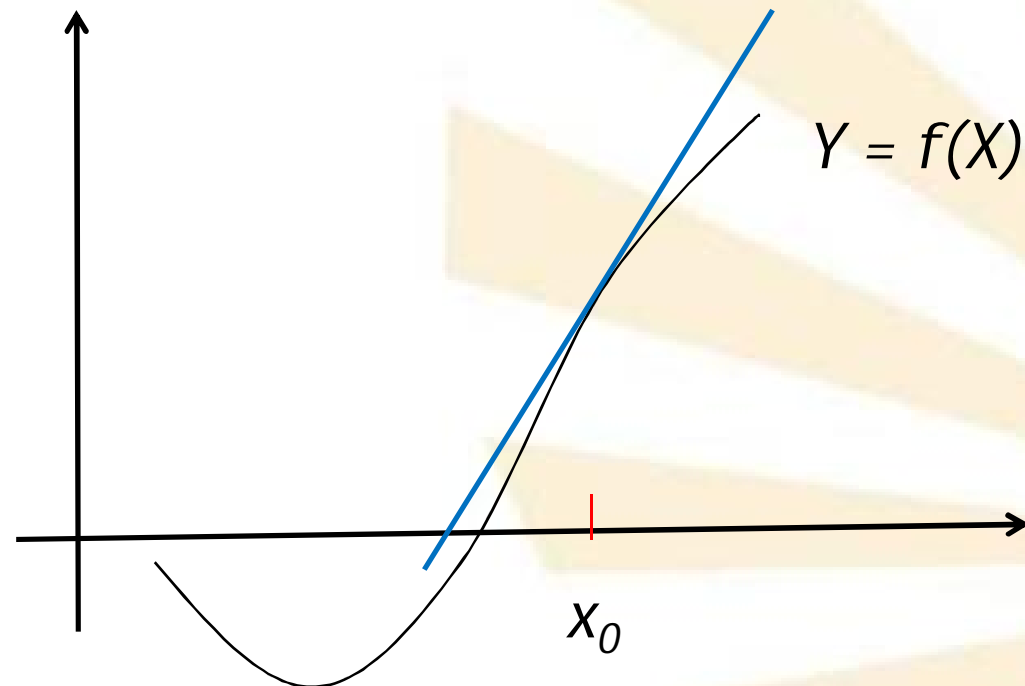


Se elige un punto inicial

4. Funciones devueltas como resultados

- **Aplicación: método de Newton** para calcular la raíz de cualquier función

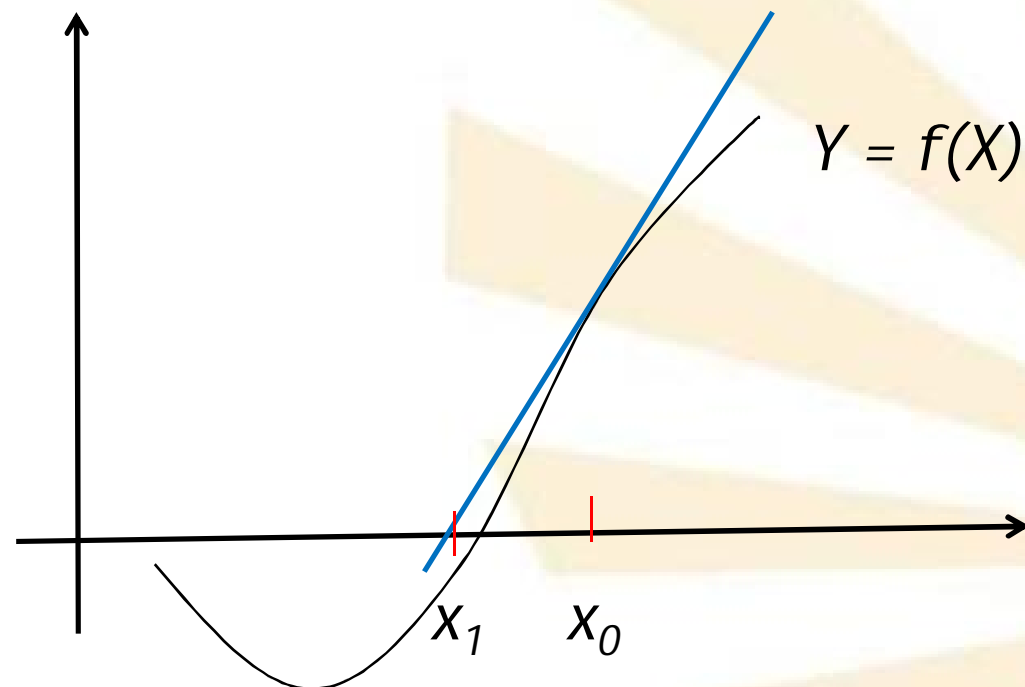
Se traza la **recta tangente**: $Y = f(x_0) + f'(x_0) \times (X - x_0)$



4. Funciones devueltas como resultados

- **Aplicación: método de Newton** para calcular la raíz de cualquier función

Se traza la **recta tangente**: $Y = f(x_0) + f'(x_0) \times (X - x_0)$



Se obtiene el **punto de corte** con el eje de abscisas

4. Funciones devueltas como resultados

- **Aplicación: método de Newton** para calcular la raíz de cualquier función
 - Sea x_0 una **aproximación** inicial a la raíz de la función
 - Si $f(x_0) \neq 0$ entonces se obtiene el siguiente elemento de la sucesión en la intersección de
 - Eje de abscisas: $Y = 0$
 - Recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$

$$Y = f(x_0) + f'(x_0) (x - x_0)$$

- El siguiente elemento es

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

4. Funciones devueltas como resultados

- **Aplicación: método de Newton** para calcular la raíz de cualquier función
 - En general, el **término general** de la sucesión es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

4. Funciones devueltas como resultados

- **Aplicación: método de Newton** para calcular la raíz de cualquier función
 - En general, el **término general** de la sucesión es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- ¿Cuándo **no** se puede aplicar el método de Newton?

4. Funciones devueltas como resultados

- **Aplicación: método de Newton** para calcular la raíz de cualquier función

○ Aplicación a la función $y = f(x) = x^2 - a$

cuya raíz es $y = \sqrt{a}$

Se obtiene la siguiente sucesión:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$$

4. Funciones devueltas como resultados

- **Aplicación: método de Newton** para calcular la raíz de cualquier función

- Funciones auxiliares:

- Aproximación a la **derivada** de una función

$$f'(x) = Df(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- **Cociente incremental**

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

4. Funciones devueltas como resultados

- **Aplicación: método de Newton** para calcular la raíz de cualquier función
 - Funciones auxiliares:
 - Aproximación a la **derivada** de una función

```
(define (cociente-incremental f h)  
  (lambda (x)  
    (/   
      (- (f (+ x h)) (f x))  
      h  
    )  
  )  
)
```

4. Funciones devueltas como resultados

- **Aplicación: método de Newton** para calcular la raíz de cualquier función
 - Funciones auxiliares:
 - Aproximación a la **derivada** de una función

```
(define (cubo x) (* x x x))
```

```
((cociente-incremental cubo 0.001) 5) → 75.01500100
```

```
0
```

```
((cociente-incremental (lambda (x) (* x x x)) 0.001) 5)  
→ 75.01500100
```

4. Funciones devueltas como resultados

- **Aplicación: método de Newton** para calcular la raíz de cualquier función
 - Funciones auxiliares:
 - Función para comprobar si la **aproximación** a la raíz es buena

```
(define (bueno? x f)  
  (< (abs (f x)) 0.001))
```



Se puede parametrizar

4. Funciones devueltas como resultados

- **Aplicación: método de Newton** para calcular la raíz de cualquier función
 - Funciones auxiliares:
 - Función que obtiene el **siguiente** elemento de la sucesión

Se puede parametrizar

```
(define (siguiente x f)
  (- x
     (/ (f x)
        ((cociente-incremental f 0.001) x)
        )
  )
)
```

4. Funciones devueltas como resultados

- **Aplicación: método de Newton** para calcular la raíz de cualquier función

```
(define (newton f inicial)
  (if (bueno? inicial f)
      inicial
      (newton f (siguiente inicial f))
  )
)
```

```
(newton (lambda (x) (- (* x x) 2)) 1) → 1.41421657
```



UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE CÓRDOBA

DEPARTAMENTO DE
INFORMÁTICA Y ANÁLISIS NUMÉRICO

PROGRAMACIÓN DECLARATIVA

INGENIERÍA INFORMÁTICA

CUARTO CURSO

PRIMER CUATRIMESTRE

Tema 4.- Recursión e iteración